J. Riess

Ebenen und Raum-Transfo

Erlangen 1893

DIE SINGULÄREN EINDEUTIGEN EBENEN- UND RAUM-TRANSFORMATIONEN NIEDERER ORDNUNG.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DES DOKTORGRADES

DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

KÖNIGLICH BAYER. FRIEDRICH-ALEXANDERS-UNIVERSITÄT

ZU

ERLANGEN

VORGELEGT VON

GEORG RIESS.

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

FREISING 1893.
BUCHDRUCKEREI DR. FRANZ PAUL DATTERER, FREISING.

Einleitung.

Das Thema zur vorliegenden Arbeit wurde mir von Herrn Professor Dr. Nöther in Erlangen gegeben, dem ich für seine gütige Unterstützung an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank ausspreche.

Was die in der Arbeit behandelten quadratischen und kubischen Ebenentransformationen betrifft, so wurden hie und da einzelne von verschiedenen Seiten bei Gelegenheit der Bearbeitung anderer Gegenstände insoweit diskutiert, als es für dieselben nötig war. Die mir gestellte Aufgabe bestand nun darin, eine systematische Zusammenstellung aller möglichen Spezialfälle, welche auftreten können, zu geben, dieselben analytisch zu behandeln und für die Transformation Normalformen aufzustellen. Hie und da wurden auch rein geometrische Betrachtungen angestellt. Die einzelnen Fälle sind ja als Spezialfälle in der allgemeinen Theorie enthalten, aber die Art der Spezialisierung ist noch in keiner Weise gegeben; es müssen die Untersuchungen über singuläre Punkte zu Hilfe genommen und auf die einzelnen Fälle in Anwendung gebracht werden. Dabei bediente ich mich hauptsächlich der von Herrn Professor Dr. Nöther (Math. Ann. Bd. IX) eingeführten Begriffe über Zerlegung singulärer Punkte. Die Anwendung bestand teils darin, dafs die Begriffe geometrisch benutzt, teils darin, dafs die daraus hervorgehenden einfachen Reihenentwickelungen eingeführt wurden.

Für den Raum beschränkte ich mich darauf, alle quadratischen einfachen Raumtransformationen zu behandeln, von denen bisher kaum eine eingehend diskutiert worden ist.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41535711_0255

Ebenentransformationen.

I.

Quadratische Transformationen.

A.

Allgemeiner Fall.

Läfst man den zweifach unendlich vielen Geraden einer Ebene E die zweifach unendlich vielen Kegelschnitte einer anderen Ebene E' projektivisch entsprechen, welche alle durch 3 feste Punkte, $1'$, $2'$, $3'$, dieser Ebene gehen, so entspricht bekanntlich jedem Punkt der einen Ebene eindeutig ein Punkt der anderen, und umgekehrt. Gleichzeitig entsprechen den geraden Linien von E' wieder Kegelschnitte in E, welche ebenfalls durch 3 feste Punkte, 1, 2, 3, gehen. Die festen Punkte in jeder der beiden Ebenen werden Fundamentalpunkte genannt; die Verbindungslinie zweier der festen Punkte einer Ebene nennt man Fundamentalgerade; eine solche wird von den Kegelschnitten der durch die drei festen Punkte gehenden Schaar nicht mehr getroffen.

Die Eindeutigkeit des Entsprechens hört auf bei den Fundamentalpunkten selbst. Einem solchen entspricht in der anderen Ebene eine Fundamentalgerade, welche wir dem betreffenden Fundamentalpunkt zugeordnet nennen wollen. Den einfach unendlich vielen Richtungen durch den Fundamentalpunkt entsprechen die einfach unendlich vielen Punkte der zugeordneten Fundamentalgeraden, und zwar so, dafs, wenn eine Kurve durch den ersteren in einer Richtung einfach hindurchgeht, die entsprechende im Allgemeinen durch den der Richtung entsprechenden Punkt der letzteren geht, ohne dieselbe zu berühren. Findet das Entsprechen zwischen den Ebenen E und E' in der Weise statt, dafs den Richtungen durch 1 die Punkte von $\overline{2'3'}$, den Richtungen durch 2 die

die Punkte von $\overline{3'\,1'}$, den Richtungen durch 3 die Punkte von $\overline{1'\,2'}$ entsprechen, so dafs auch den Richtungen durch die Punkte $1'$, $2'$, $3'$ bezw. die Punkte von $\overline{2\,3}$, $\overline{3\,1}$, $\overline{1\,2}$ entsprechen, und geht in E eine Kurve durch 1 in der Richtung $\overline{1\,2}$, so geht die entsprechende durch $3'$ in der Richtung $\overline{3'\,2'}$. Ähnlich ist das Verhalten der übrigen Punkte.

Im Allgemeinen entspricht einer Kurve C von der Ordnung n eine Kurve C' von der Ordnung $2n$. Geht C jedoch durch einen Fundamentalpunkt i-fach, so scheidet sich bei der Transformation die zugeordnete Fundamentalgerade i-mal ab, und die Ordnung der entsprechenden Kurve ist nur noch $2n - i$, also um i erniedrigt.

B.

Spezielle Fälle.

Es handelt sich nun darum, das Entsprechen zu untersuchen, wenn die drei Fundamentalpunkte nicht getrennt von einander liegen, sondern wenn zwei davon oder auch alle drei benachbart sind, und für die Transformationsformeln kanonische Formen aufzustellen.

Im Folgenden seien die Koordinaten in E mit x_1, x_2, x_3, die in E' mit y_1, y_2, y_3 bezeichnet.

I. Zwei der Fundamentalpunkte von E, 2 und 3, mögen einander benachbart werden.

Das Koordinatendreieck in E liege so, dafs $x_1 = 0$ die Verbindungslinie $\overline{2\,3}$ der benachbarten Fundamentalpunkte, $x_2 = 0$ die Linie $\overline{1\,2}$ ist, welche den isoliert liegenden Fundamentalpunkt 1 mit dem ausgezeichneten 2 verbindet, und $x_3 = 0$ eine beliebige Gerade durch 1 ist.

Die Transformationsformeln lauten dann:

$$\begin{aligned} \varrho\, y_1 &= x_1\, x_2, \\ \varrho\, y_2 &= x_2^2\ \ , \\ \varrho\, y_3 &= x_1\, x_3, \end{aligned}$$

und die Umkehrung:

$$\sigma x_1 = y_1^2 \quad .$$
$$\sigma x_2 = y_1 y_2,$$
$$\sigma x_3 = y_2 y_3.$$

Wie man aus den Formeln sieht, erhält man auch in E' einen ausgezeichneten Punkt, indem ebenfalls zwei der Fundamentalpunkte, $2'$ und $3'$, einander benachbart werden, und zwar ist $y_2 = 0$ die Verbindungslinie derselben, während $y_1 = 0$ den getrennt liegenden Fundamentalpunkt $1'$ mit dem ausgezeichneten verbindet, und $y_3 = 0$ eine beliebige Gerade durch $1'$ ist.

Fundamentallinien sind in E die Geraden $\overline{2\,3}$ und $\overline{1\,2}$, in E' die Geraden $\overline{2'\,3'}$ und $\overline{1'\,2'}$; denn keine derselben wird von den Kegelschnitten der Schaar, welche durch die drei Fundamentalpunkte der betreffenden Ebene geht, in beweglichen Punkten getroffen. Die Fundamentalgeraden in E sind bezw. den Punkten $1'$ und $2'$ (oder $3'$), die in E' bezw. den Punkten 1 und 2 (oder 3) zugeordnet.

Einer Kurve C von der Ordnung n, welche durch keinen Fundamentalpunkt in E hindurchgeht, entspricht in E' eine Kurve C' von der Ordnung $2n$. Geht aber C durch 1 oder durch 2 in anderer Richtung als $\overline{2\,3}$, so scheidet sich bei der Transformation die Gleichung der bezüglichen zugeordneten Geraden ab, so dafs die entsprechende Kurve je von der Ordnung $2n-1$ ist. Geht C durch die successiven Punkte 2 und 3, so geht die zugeordnete Gerade $\overline{1'\,2'}$ bei der Transformation doppelt ab. Sie kann also als doppelt zu rechnende Fundamentalgerade betrachtet werden.

Wie im allgemeinen Fall der getrennt von einander liegenden Fundamentalpunkte entsprechen den Richtungen durch 1 die Punkte von $2'\,3'$. Geht eine Kurve C durch 1 in der Richtung der Fundamentalgeraden $1\,2$ hindurch, so hat die entsprechende Kurve C' in $2'$ einen Wendepunkt mit der Tangente $\overline{2'\,3'}$. Denn entwickelt man für C $\frac{x_2}{x_1} = \xi_2''$ nach Potenzen von $\frac{x_3}{x_1} = \xi_3''$, setzt man also

$$\xi_2'' = a\,\xi_3''^2 + \ldots$$

so erhält man

$$\frac{y_1}{y_3} = \alpha \xi_3'' + \ldots.$$
$$\frac{y_2}{y_3} = \alpha \xi_3''^3 + \ldots;$$

aus dem Umstande, dafs die Reihe für $\frac{y_1}{y_3}$ mit der ersten, die für $\frac{y_2}{y_3}$ mit der dritten Potenz von ξ_3'' beginnt, erkennt man die Richtigkeit der Behauptung.

Den Richtungen durch 2 entsprechen die Richtungen durch 2'. Denn wenn

$$\frac{x_1}{x_3} = 0, \quad \frac{x_2}{x_3} = 0 \text{ und } \frac{x_1}{x_2} = \lambda \text{ ist,}$$

so ist auch

$$(1) \qquad \frac{y_1}{y_3} = 0, \quad \frac{y_2}{y_3} = 0, \quad \frac{y_1}{y_2} = \lambda.$$

Dafs den Richtungen durch 2 nicht die Punkte einer Geraden entsprechen können, wie dies bei Punkt 1 der Fall ist, kann man auch rein geometrisch einsehen. Nehmen wir nämlich in E' eine beliebige Gerade G', so entspricht dieser in E ein Kegelschnitt C_2, welcher durch die Punkte 1, 2 und 3 geht. Da die Punkte von G' und C_2 sich eindeutig entsprechen, so wird dem Schnittpunkt von G' mit $\overline{1'2'}$ nur der Durchgang von C_2 durch die successiven Punkte 2 und 3 entsprechen. Dasselbe findet für alle Geraden von E' statt. Es läfst sich also auf keiner der Geraden von E' eine Stelle finden, welche dem Punkt 2 in einer anderen Richtung als $\overline{23}$ entsprechen könnte. Den verschiedenen Richtungen durch diesen Punkt mufs also in E' ein Gebilde entsprechen, welches von keiner der beliebigen Geraden dieser Ebene getroffen wird, und dieses besteht, wie wir gesehen haben, aus den verschiedenen Richtungen durch den Punkt 2.

Geht eine Kurve C durch 2 in der Richtung $\overline{23}$, so genügt zur Feststellung des Entsprechens die letzte der Gleichungen (1) nicht mehr, sondern man mufs $\frac{x_1}{x_3} = \xi_1$ nach Potenzen von $\frac{x_2}{x_3} = \xi_2$ weiter entwickeln, also da $\lambda = 0$ ist,

$$(2) \quad \xi_1 = \alpha \xi_2^2 + \beta \xi_2^3 + \dots$$

setzen. Man erhält so

$$\frac{y_1}{y_3} = \xi_2$$

$$\frac{y_2}{y_3} = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha^2} \xi_2 + \dots$$

$$(3) \quad y_1 : (y_2 - \frac{1}{\alpha} y_3) = -\frac{\alpha^2}{\beta} + \dots$$

Da nun α in (2) den auf 2 und 3, und β den weiter folgenden Punkt von C bestimmt, so sieht man, dafs C' durch einen von der ersten Krümmung von C in 2 abhängigen Punkt $\left(y_1 = 0, \frac{y_2}{y_3} = \frac{1}{\alpha}\right)$ von $1'2'$ geht, ohne die letztere Gerade zu berühren, wie aus Gleichung (3) ersichtlich ist.

Geht C durch 2 in der Richtung $\overline{21}$, so hat C' in $2'$ einen Rückkehrpunkt erster Ordnung mit $2'3'$ als Tangente. Denn entwickelt man in diesem Falle ξ_2 nach Potenzen von ξ_1, so erhält man

$$\xi_2 = \alpha \xi_1^2 + \beta \xi_1^3 + \dots,$$

daraus

$$\frac{y_1}{y_3} = \alpha \xi_1^2 + \beta \xi_1^3 + \dots$$

$$\frac{y_2}{y_3} = \alpha^2 \xi_1^3 + 2\alpha\beta \xi_1^4 + \dots$$

Entwickelt man aus der vorletzten dieser Formeln ξ_1 nach Potenzen von $\eta_1 = \frac{y_1}{y_3}$, so erhält man

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \eta_1^{\frac{1}{2}} + \dots;$$

dieser Wert in die Reihe für $\frac{y_2}{y_3} = \eta_2$ eingesetzt, ergibt

$$\eta_2 = \sqrt{\alpha}\, \eta_1^{\frac{3}{2}} + \dots,$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung erhellt.

Da alles bisher Gesagte auch umgekehrt giltig ist, lassen sich die gefundenen Resultate folgendermafsen zusammenfassen:

Den einfach unendlich vielen Richtungen des isolierten Fundamentalpunktes entsprechen die einfach unendlich vielen

Punkte der ihm zugeordneten Fundamentalgeraden der anderen Ebene. Den verschiedenen Richtungen durch den ausgezeichneten Fundamentalpunkt entsprechen die verschiedenen Richtungen durch den analogen Punkt der anderen Ebene. Nähert man sich einem solchen Punkte auf einer Kurve, welche die Verbindungslinie der benachbarten Fundamentalpunkte zur Tangente hat, so entspricht in der anderen Ebene je nach der ersten Krümmung dieser Kurve ein Punkt der ihm zugeordneten Geraden. Geht eine Kurve durch den ausgezeichneten Fundamentalpunkt in der Richtung auf den isoliert liegenden hindurch, so hat die entsprechende Kurve in dem ausgezeichneten Fundamentalpunkte der anderen Ebene einen gewöhnlichen Rückkehrpunkt mit der Verbindungslinie der beiden benachbarten Fundamentalpunkte als Tangente.

Dabei entspricht im Allgemeinen einer Kurve von der Ordnung n eine solche von der Ordnung $2n$. Geht aber die erstere durch einen Fundamentalpunkt, so ist die Ordnung der entsprechenden Kurve $2n-1$, indem sich bei der Transformation die dem Fundamentalpunkte zugeordnete Gerade abscheidet. Jedem der beiden benachbarten Fundamentalpunkte einer Ebene ist ein und dieselbe Fundamentalgerade zugeordnet.

II. Die drei Fundamentalpunkte 1, 2 und 3 in E mögen einander benachbart werden.

Die drei Punkte müssen so successiv sein, dafs man eigentliche Kegelschnitte durch sie hindurchlegen kann; sie dürfen also auch auf keiner Geraden liegen.

Ist $x_1 = 0$ die Verbindungslinie zweier der benachbarten Fundamentalpunkte, 1 und 2, $x_2 = 0$ eine beliebige Gerade durch 1, und $x_3 = 0$ eine ganz beliebige Gerade, so lauten die Transformationsformeln:

$$\varrho\, y_1 = x_1^2$$
$$\varrho\, y_2 = x_1\, x_2$$
$$\varrho\, y_3 = x_1\, x_3 + x_2^2;$$

umgekehrt:

$$\sigma\, x_1 = y_1^2$$
$$\sigma\, x_2 = y_1\, y_2$$
$$\sigma\, x_3 = y_1\, y_3 - y_2^2.$$

Wie man sieht, werden auch in E' die Fundamentalpunkte $1'$, $2'$ und $3'$ benachbart: $y_1 = 0$ ist die Verbindungslinie $\overline{1'2'}$ zweier der Punkte, $y_2 = 0$ eine beliebige Gerade durch $1'$ und $y_3 = 0$ eine ganz beliebige Gerade.

Von Fundamentallinien gibt es sowohl in E als in E' nur je eine, nämlich $\overline{12}$ resp. $\overline{1'2'}$, von denen die erstere dem Punkte $1'$ ($2'$ oder $3'$), die letztere dem Punkte 1 (2 oder 3) zugeordnet ist. Jede derselben kann als eine dreifache Fundamentalgerade betrachtet werden, da sich eine solche dreimal bei der Transformation abscheidet, wenn eine Kurve in der anderen Ebene einen durch die drei benachbarten Fundamentalpunkte gehenden Zweig hat. Geht eine Kurve der einen Ebene nur durch einen oder zwei der Fundamentalpunkte, so scheidet sich die zugeordnete Fundamentalgerade der anderen Ebene davon herrührend auch nur einmal bezw. zweimal ab.

Nähert man sich dem Punkte 1 in der Richtung

$$x_1 - \lambda x_2 = 0,$$

so findet man aus dieser Gleichung und den Gleichungen

$$\frac{x_1}{x_3} = 0, \quad \frac{x_2}{x_3} = 0$$

die Verhältnisse

$$\frac{y_1}{y_2} = \lambda, \quad \frac{y_1}{y_3} = 0 \text{ und } \frac{y_2}{y_3} = 0,$$

d. h. den Richtungen durch 1 entsprechen die Richtungen durch $1'$.

Geht eine Kurve C in E durch die Punkte 1 und 2, so geht die entsprechende C' durch $1'$ und $2'$; denn entwickelt man $\frac{x_1}{x_3} = \xi_1$ nach Potenzen von $\frac{x_2}{x_3} = \xi_2$, so erhält man

$$\xi_1 = \alpha \xi_2^2 + \dots$$

und daraus

$$\frac{y_1}{y_3} = \frac{\alpha^2}{1+\alpha} \xi_2^2 + \dots,$$

$$\frac{y_2}{y_3} = \frac{\alpha}{1+\alpha} \xi_2 + \dots$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung irgend eines der durch die 3 Punkte $1'$, $2'$ und $3'$ gehenden Kegelschnitte,

z. B. in $y_1 y_3 - y_2^2 = 0.$

ein, so erhält man

$$\frac{\alpha(\alpha-1)}{1+\alpha}\xi_2^2 + \ldots = 0.$$

Da sich aus der letzten Gleichung der Faktor ξ_2^2 ausscheidet, sieht man, dafs C' durch $1'$ und $2'$ geht.

Der geometrische Grund, dafs den Kurvenzweigen am Punkt 1 sowohl in beliebigen Richtungen, als in der Richtung $\overline{1\,2}$ wieder die Zweige am analogen Punkt mit analogen Richtungen entsprechen, ist durch eine ganz ähnliche Betrachtung, wie sie beim vorigen speziellen Falle auf Seite 10 angestellt wurde, zu erkennen.

Dem Durchgang von C in E durch die drei Punkte 1, 2, 3 entspricht der Durchgang von C' durch einen Punkt von $1'2'$, dessen Lage von dem auf die drei Fundamentalpunkte in E folgenden Punkt von C abhängt. Denn da in diesem Falle

$$\frac{x_1}{x_2} = 0 \text{ und } \xi_1 = -\xi_2^2 + \alpha\xi_2^3 + \ldots$$

ist, folgt:

$$\frac{y_1}{y_2} = 0 \text{ d. h. } y_1 = 0.$$

ferner

$$\frac{y_1}{y_3} = \frac{1}{\alpha}\xi_2 + \ldots,$$

$$(4)\quad \frac{y_2}{y_3} = -\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha^2+\beta}{\alpha^2}\xi_2 + \ldots.$$

$$(5)\quad y_1 : \left(y_2 + \frac{1}{\alpha}y_3\right) = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta} + \ldots$$

Aus (4) ist ersichtlich, dafs C' durch den von der Geraden $\alpha y_2 + y_3 = 0$ auf $y_1 = 0$ bestimmten Punkt geht, und aus (5), dafs C' dabei $y_1 = 0$ nicht berührt. Weil nun α den auf 1, 2, 3 folgenden Punkt von C bestimmt, ist die Richtigkeit der Behauptung erwiesen.

Da dasselbe Verhalten der Fundamentalpunkte auch umgekehrt stattfindet, kann man die Resultate folgendermafsen zusammenfassen: Geht eine Kurve C durch einen oder zwei der benachbarten Fundamentalpunkte einer Ebene, so geht die entsprechende Kurve C' davon herrührend, ebenfalls durch

einen bezw. zwei der Fundamentalpunkte. Geht C jedoch durch alle drei Fundamentalpunkte, so geht C' durch einen gewissen Punkt der zugeordneten Fundamentalgeraden, dessen Lage von dem auf die drei Fundamentalpunkte folgenden vierten Punkt von C abhängig ist. Ist C von der Ordnung n, so ist C' in den drei Fällen von der Ordnung $2n-1$, $2n-2$ und $2n-3$.

Zum Schlufs sei hier noch ein Beispiel angefügt. Nehmen wir zunächst an, es lägen die drei Fundamentalpunkte jeder der drei Ebenen E und E' getrennt von einander, und wir hätten in E eine Kurve C von der Ordnung n, welche in den Punkten 1, 2, 3 bezw. k_1-, k_2-, k_3-fache Punkte habe. Die Ordnung der entsprechenden Kurve C' wird dann sein $n' = 2n - k_1 - k_2 - k_3$. Umgekehrt ist auch die Ordnung von C $n = 2n' - k_1' - k_2' - k_3'$, wo k_1', k_2', k_3' für die Punkte 1', 2', 3' dasselbe bezeichnen, wie k_1, k_2, k_3 für 1, 2, 3. Da C die Gerade 2 3 aufser in 2 und 3 noch in $n - k_2 - k_3$ Punkten trifft, und da diesen Punkten die Richtungen durch 1' entsprechen, so sieht man, dafs 1' für C' ein $(n - k_2 - k_3)$-facher Punkt ist, oder dafs $k_1' = n - k_2 - k_3$. Ebenso findet man, dafs $k_2' = n - k_3 - k_1$ und $k_3' = n - k_1 - k_2$ ist.

Dieselben Gleichungen bleiben nun auch erhalten, wenn die Fundamentalpunkte beider Ebenen einander benachbart werden. Die Punkte 1, 2, 3 seien wieder bezw. k_1-, k_2-, k_3-fache, die Punkte 1', 2', 3' ebenso k_1'-, k_2'-, k_3'-fache. Dies ist jetzt so aufzufassen, dafs von den k_1 durch 1 gehenden Elementen k_2 Elemente auch durch 2, also $k_1 - k_2$ Elemente durch 1 entweder in beliebigen Richtungen oder in Richtungen gehen, welche der Richtung $\overline{1\,2}$ benachbart sind; von den k_2 durch 2 gehenden Elementen gehen k_3 auch noch durch 3, so dafs $k_2 - k_3$ durch 1 und 2, aber nicht durch 3 gehen. Analog seien die Bezeichnungen in E'.

Da nun C in 1 $k_1 - k_2$ Elemente hat, welche nicht durch 2 gehen, so erniedrigt sich die Ordnung der transformierten Kurve C' zunächst um $k_1 - k_2$; da C ferner $k_2 - k_3$ Elemente hat, welche durch 1 und 2 und nicht durch 3 gehen, erniedrigt sich davon herrührend die Ordnung von C' um $2(k_2 - k_3)$; und da C noch k_3 Elemente hat, welche durch

alle drei Punkte 1, 2, 3 gehen, so erniedrigt sich die Ordnung von C' noch um $3k_3$. Sie ist also

$$(6) \quad n' = 2n - (k_1 - k_2) - 2(k_2 - k_3) - 3k_3$$
$$= 2n - k_1 - k_2 - k_3$$

Umgekehrt ist ebenfalls klar, dafs

$$(7) \quad n = 2n' - k_1' - k_2' - k_3'$$

sein mufs. Da den in beliebigen Richtungen durch 1 gehenden Elementen von C die analogen Elemente von C', und den durch 1 und 2 gehenden Elementen von C die durch 1' und 2' gehenden Elemente von C' entsprechen, so hat man unmittelbar die Gleichungen

$$k_1 - k_2 = k_1' - k_2',$$
$$k_2 - k_3 = k_2' - k_3',$$
$$k_1 - k_3 = k_1' - k_3',$$

von welchen eine die Folge der beiden anderen ist. Aus diesen 3 Gleichungen im Verein mit den Gleichungen (6) und (7) findet sich sofort

$$k_1' = n - k_2 - k_3,$$
$$k_2' = n - k_3 - k_1,$$
$$k_3' = n - k_1 - k_2.$$

Dies sind in der That dieselben Gleichungen wie im Falle der getrennt liegenden Fundamentalpunkte.

II.

Kubische Transformationen.

A.

Allgemeiner Fall.

Läfst man den zweifach unendlich vielen Geraden von E die zweifach unendlich vielen Kurven dritter Ordnung von E' projektivisch entsprechen, welche sämtlich in einem festen Punkt $0'$ einen Doppelpunkt haben und durch vier weitere Punkte $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ einfach hindurchgehen, so findet ein solches Entsprechen wiederum umgekehrt statt, indem auch den Geraden von E' Kurven dritter Ordnung in E entsprechen, welche in einem festen Punkte 0 einen Doppelpunkt haben und durch vier andere feste Punkte 1, 2, 3, 4 einfach hindurchgehen, und es entspricht dabei auch jedem Punkte der einen Ebene eindeutig ein Punkt der anderen.

Man lege in E eine Ecke des Koordinatendreiecks, und zwar $(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$, in den Doppelpunkt 0, die beiden anderen $(x_1 = 0,\ x_3 = 0)$ und $(x_2 = 0,\ x_3 = 0)$ bezw. in die einfachen Punkte 1 und 2; man kann dann als Transformationsformeln nehmen:

$$\varrho\, y_1 = x_1(x_2x_3 + x_1x_3 + x_2x_1) = x_1K,$$
$$\varrho\, y_2 = x_2(x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2) = x_2K,$$
$$\varrho\, y_3 = x_3(x_1 - x_2)(x_1 + ax_2),$$

wobei die Punkte 3 und 4 die nicht in 0 fallenden Schnittpunkte des Kegelschnittes K mit den Geraden $x_1 - x_2 = 0$ bezw. $x_1 + ax_2 = 0$ sind.

Die Umkehrung der Formeln ergibt:

$$\sigma x_1 = y_1[(y_1 - y_2)(y_1 + ay_2) - (y_1 + y_2)y_3] = y_1K',$$
$$\sigma x_2 = y_2[(y_1 - y_2)(y_1 + ay_2) - (y_1 + y_2)y_3] = y_2K',$$
$$\sigma x_3 = y_1y_2y_3.$$

In E' sind die festen Punkte so verteilt, dafs ($y_1 = 0$, $y_2 = 0$) der Doppelpunkt $0'$ ist, während die einfachen Punkte $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ die bezüglichen Schnittpunkte der geraden Linien

$$y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_1 - y_2 = 0,\ y_1 + a y_2 = 0$$

mit dem Kegelschnitt K' sind.

Fundamentallinien sind in E der Kegelschnitt K und die Geraden $\overline{0\,1}$, $\overline{0\,2}$, $\overline{0\,3}$, $0\,4$, in E' der Kegelschnitt K' und die Geraden $\overline{0'\,1'}$, $\overline{0'\,2'}$, $\overline{0'\,3'}$, $\overline{0'\,4'}$.

Dem Punkt 0 ist der Kegelschnitt K' zugeordnet. Geht in E eine Kurve C durch 0 einmal oder mehreremal hindurch, so wird die Ordnung der transformierten Kurve, welche im Allgemeinen $3n$ ist, für jedes Durchgehen um 2 erniedrigt, indem sich immer die Gleichung von K' absondert. Aufserdem entspricht jeder Richtung durch 0 ein Punkt von K' genau in derselben Weise, wie bei der allgemeinen quadratischen Transformation der Richtung durch einen Fundamentalpunkt ein Punkt der ihm zugeordneten Geraden entsprach. Läfst man eine Kurve C durch 0 in der Richtung der Fundamentallinie 0 1 hindurchgehen, so geht die entsprechende C' durch $1'$, indem sie K' in erster Ordnung berührt, welches Verhalten wieder mit dem der Fundamentalpunkte bei der quadratischen Transformation übereinstimmt. Dasselbe ergibt sich für 0 in der Richtung auf die übrigen Fundamentalpunkte 2, 3 und 4.

Das Verhalten eines einfachen Fundamentalpunktes, z. B. 1, ist ebenfalls genau so, wie das eines isolierten Fundamentalpunktes bei den quadratischen Transformationen. Geht also eine Kurve C durch 1, so geht bei der Transformation die zugeordnete Gerade $\overline{0'\,1'}$ ab, und die Ordnung der transformierten Kurve wird um 1 erniedrigt. Aufserdem geht C' durch einen von der Tangentenrichtung der Kurve C in 1 abhängigen Punkt von $\overline{0'\,1'}$, ohne diese Gerade zu berühren.

Berührt C die Geraden $\overline{1\,0}$ im Punkt 1, so entwickeln wir $\frac{x_1}{x_2} = \xi_1'$ nach Potenzen von $\frac{x_3}{x_2} = \xi_3'$, indem wir

$$\xi_1' = \alpha \xi_3'^2 + \dots$$

setzen, und finden daraus:

$$\frac{y_3}{y_2} = -\alpha + \ldots,$$
$$\frac{y_1}{y_2} = \alpha \xi_3'^2 + \ldots,$$

d. h. C' geht durch $1'$, indem es ebenfalls die Fundamentalgerade $\overline{1'0'}$ berührt. Nähert sich C dem Punkt 1 mit der Tangentenrichtung $\overline{12}$, so ist die vorige Entwickelung nicht zu gebrauchen, sondern es mufs ξ_3' nach Potenzen von ξ_1' entwickelt werden, so dafs man erhält

$$\xi_3' = \alpha \xi_1'^2 + \ldots,$$
$$\frac{y_1}{y_2} = \xi_1',$$
$$\frac{y_3}{y_2} = \xi_1'(-\alpha\alpha + \ldots),$$
$$\frac{y_3}{y_1} = -\alpha\alpha,$$

d. h. C' geht durch den Schnitt von $\overline{0'1'}$ mit der Geraden $\overline{3'4'}$. Ebenso würde man finden, dafs den Richtungen des Punktes 1 auf 3 oder 4 hin die Schnittpunkte von $\overline{0'1'}$ mit $\overline{2'4'}$ bezw. $\overline{2'3'}$ entsprechen. Analoges findet sich für die übrigen einfachen Fundamentalpunkte.

Die erhaltenen Resultate lassen sich nun in folgender Weise zusammenfassen:

Den einfach unendlich vielen Richtungen eines Doppelpunktes entsprechen die einfach unendlich vielen Punkte des zugeordneten Kegelschnittes, und den Richtungen eines einfachen Fundamentalpunktes die Punkte der zugeordneten Fundamentalgeraden. Sind i und k zwei der Punkte 0 bis 4, bedeutet i_k die Richtung des Punktes i auf k hin, i_K die Richtung des Punktes i in der Tangente an K, so entspricht bei ähnlicher Bezeichnung für E'

dem Punkt 0_i der Punkt $i'_{K'}$,

„ „ i_0 „ „ $i'_{0'}$,

und wenn i, k, l, j eine Permutation von 1, 2, 3, 4 bilden,

dem Punkt i_k der Schnitt von $\overline{0'i'}$ mit $\overline{l'j'}$.

Alles ist auch giltig, wenn man die gestrichenen Buchstaben und Zahlen mit den nicht gestrichenen vertauscht.

Im Allgemeinen entspricht dabei einer Kurve von der Ordnung n eine solche von der Ordnung $3n$. Geht aber die erstere durch einen Doppelpunkt oder einen einfachen Fundamentalpunkt i-mal hindurch, so sondert sich bei der Transformation der zugeordnete Kegelschnitt bezw. die zugeordnete Gerade i-mal ab, so dafs die Ordnung der transformierten Kurve $3n—2i$ bezw. $3n—i$ ist.

B.

Spezielle Fälle.

Wir gehen nun dazu über, alle möglichen Fälle zu untersuchen, in welchen die Fundamentalpunkte spezielle Lage zu einander haben. Um sämtliche Fälle zu erhalten, verfahren wir folgendermafsen:

Wir ordnen die speziellen Fälle, welche in E möglich sind, zunächst in 3 Gruppen, ohne dieselben jedoch im Folgenden durch besondere Bezeichnungen hervorzuheben; die erste derselben enthält diejenigen Fälle, in welchen der Punkt 0 getrennt von den einfachen Fundamentalpunkten 1, 2, 3, 4 liegt; die zweite enthält die Fälle, in welchen einer oder mehrere der einfachen Fundamentalpunkte in die Nähe von 0 rücken, aber ohne dafs die Schar der Kurven dritter Ordnung in E, welche durch die 5 festen Punkte gehen, dort einen Rückkehrpunkt haben; die dritte Gruppe endlich enthält diejenigen Fälle, bei welchen dies der Fall ist. Innerhalb jeder Gruppe erhalten wir die einzelnen Fälle von Spezialisierungen, indem wir zunächst zwei Untergruppen aufstellen, je nachdem niemals drei Punkte auf einer Geraden liegen, oder einmal. Alle übrigen Spezialisierungen werden dann erhalten, indem man die einfachen Punkte unter sich zusammenrücken läfst. Bezüglich des Doppelpunktes ist zu bemerken, dafs mit ihm überhaupt nur ein einfacher Fundamentalpunkt auf einer Geraden liegen kann, da man sonst durch die 5 Punkte keine eigentlichen Kurven dritter Ordnung legen könnte. Aus demselben Grunde können auch die vier einfachen Fundamentalpunkte nicht auf einer Geraden liegen.

Verfahren wir nun in der vorher angegebenen Weise, so werden sich mehrere Fälle wiederholen, indem sich die Fälle in E anders ordnen, als in E', also einer der späteren Fälle in E eine Lage der Fundamentalpunkte in E' ergeben kann, welche früher schon in E behandelt wurde. Insbesondere wird sich zeigen, dafs, wenn in einer Ebene zwei einfache Punkte zusammenrücken, die gleichzahligen in der anderen Ebene dies ebenfalls thun, dafs aber, wenn drei der einfachen Punkte 1, 2, 3, auf eine Gerade rücken, der vierte Punkt 4′ der anderen Ebene an 0′ heranrückt.

I. Der Punkt 3 in E möge in die Nähe von 1 rücken, jedoch so, dafs weder 1, 2, 3, noch 2, 3, 4 auf einer Geraden liegen.

E erhält dadurch einen ausgezeichneten Fundamentalpunkt, 1. Sind $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ bezw. die Geraden $\overline{0\,1}$, $\overline{0\,2}$, $\overline{1\,2}$, so erhält man als Transformationsformeln:

$$\varrho y_1 = x_1(x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2) = x_1K,$$
$$\varrho y_2 = x_2(x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2) = x_2K,$$
$$\varrho y_3 = x_1(x_1 - x_2)x_3.$$

Umkehrung:

$$\sigma x_1 = y_1(y_1^2 - y_2y_3 - y_3y_1 - y_1y_2) = y_1K',$$
$$\sigma x_2 = y_2(y_1^2 - y_2y_3 - y_3y_1 - y_1y_2) = y_2K',$$
$$\sigma x_3 = y_1y_2y_3.$$

Auch E' erhält einen ausgezeichneten einfachen Fundamentalpunkt, indem 1′ und 3′ einander benachbart werden; 2′ und 4′ liegen getrennt von einander.

Fundamentallinien sind in E wieder der Kegelschnitt K und die Geraden $\overline{0\,1}$, $\overline{0\,2}$, $\overline{0\,4}$; in E' der Kegelschnitt K' und die Geraden $\overline{0'\,1'}$, $\overline{0'\,2'}$, $\overline{0'\,4'}$, welche den Punkten 1′, 2′, 4′ bezw. 1, 2, 4 zugeordnet sind. Die Geraden $\overline{0\,1}$ und $\overline{0'\,1'}$ sind als doppelt zu rechnende Fundamentallinien aufzufassen, da, wenn eine Kurve durch die benachbarten Punkte 1′ und 3′ bezw. 1 und 3 geht, diese Geraden sich bei der Transformation zweimal abscheiden.

Für den Punkt 0 kann man alles im allgemeinen Fall Gesagte beibehalten; nur die Richtung von 0 auf den ausgezeichneten Punkt 1 hin macht eine Ausnahme. Geht nämlich eine Kurve durch 0 mit der Tangente $\overline{01}$ hindurch, so hat davon herrührend die entsprechende in $1'$ mit K' eine dreipunktige Berührung. Denn entwickelt man für die erstere $\frac{x_1}{x_3} = \xi_1$ nach Potenzen von $\frac{x_2}{x_3} = \xi_2$, setzt man also

$$\xi_1 = \alpha \xi_2^2 + \ldots,$$

so erhält man

$$\frac{y_1}{y_2} = \alpha \xi_2 + \ldots,$$

$$\frac{y_3}{y_2} = \xi_2(-\alpha + \ldots).$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung von K' ein, so ergibt sich

$$\xi_2^3 (-\alpha^2 (2\alpha - 1) + \ldots) = 0,$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung erhellt.

Das Verhalten der entsprechenden Kurve hier ist ganz analog dem im I. Spezialfall der quadratischen Transformation. Dort, wie hier, lagen 2 Fundamentalpunkte einander benachbart und ein dritter getrennt davon; ging dort eine Kurve durch den isolierten Punkt 1 in der Richtung auf den ausgezeichneten 2 hin, so hatte die entsprechende im ausgezeichneten Punkt von E' einen Wendepunkt mit $\overline{2'3'}$ als Tangente, d. h. sie hatte mit der Fundamentallinie $\overline{2'3'}$ drei Punkte gemein. In dem jetzigen Falle tritt an Stelle der Fundamentalgeraden einfach der Fundamentalkegelschnitt K'.

Von den einfachen Punkten zeigt nur 1 ein von dem früheren verschiedenes Verhalten. Es entsprechen nämlich den Richtungen durch 1 die Richtungen durch $1'$, indem, wenn für eine Kurve in E $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_2} = 0$ und $\frac{x_3}{x_1} = \lambda$ ist, für die entsprechende in E' die Gleichungen

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_3}{y_2} = 0 \text{ und } \frac{y_1}{y_3} = -\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)$$

gelten.

Ist speziell $\lambda = 0$, d. h. geht die erste Kurve durch 1 mit $\overline{1\,2}$ als Tangente, so ist auch in E' $\frac{y_3}{y_1} = 0$, d. h. die entsprechende Kurve geht durch $1'$ mit $\overline{1'2'}$ als Tangente.

Läfst man eine Kurve C durch 1 mit $\overline{1\,0}$ als Tangente hindurchgehen, so setzen wir

$$\xi_1' = \alpha \xi_3'^2 + \beta \xi_3'^3 + \ldots,$$

wo $\xi_1' = \frac{x_1}{x_2}$ und $\xi_3' = \frac{x_3}{x_2}$ ist.

Aus dieser Reihe findet sich:

$$\frac{y_1}{y_2} = \alpha \xi_3'^2 + \beta \xi_3'^3 + \ldots,$$

$$\frac{y_3}{y_2} = -\alpha \xi_3'^2 + (\alpha^2 - \beta) \xi_3'^3 + \ldots,$$

$$\frac{y_1}{y_2} + \frac{y_3}{y_2} = \alpha^2 \xi_3'^3 + \ldots;$$

man sieht daraus, dafs C' in $1'$ einen gewöhnlichen Rückkehrpunkt mit $\overline{1'3'}$ als Tangente hat. Geht C durch 1, indem sie K zweipunktig berührt, dann schneidet C' die Gerade $\overline{0'1'}$ in einem Punkt, dessen Lage von der Krümmung von C in 1 abhängig ist. Man hat nämlich in diesem Falle

$$\xi_1' = -\xi_3' + \alpha \xi_3'^2 + \ldots,$$

$$\frac{y_1}{y_3} = -\xi_3' + \alpha \xi_3'^2 + \ldots,$$

$$\frac{y_3}{y_2} = \frac{1}{\alpha - 1} + \ldots,$$

und α bestimmt die Krümmung von C in 1.

Auch der ausgezeichnete Punkt 1 verhält sich also analog, wie der ausgezeichnete Punkt in dem vorhin erwähnten Spezialfall der quadratischen Transformationen.

II. **Punkt 3 möge an 1, Punkt 4 an 2 heranrücken, ohne dafs drei dieser Punkte auf einer Geraden liegen.**

Wird die Lage des Koordinatendreieckes wie bisher beibehalten, so hat man als Formeln für die Transformation:

$$\varrho y_1 = x_1 (x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2) = x_1 K,$$
$$\varrho y_2 = x_2 (x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2) = x_2 K,$$
$$\varrho y_3 = x_1 x_2 x_3,$$

umgekehrt:

$$\sigma x_1 = y_1 (y_1 y_2 - y_2 y_3 - y_1 y_3) = y_1 K',$$
$$\sigma x_2 = y_2 (y_1 y_2 - y_2 y_3 - y_1 y_3) = g_2 K',$$
$$\sigma x_3 = y_1 y_2 y_3.$$

Die Lage der Fundamentalpunkte in E' ist ganz analog der in E.

Der Fall bietet gar nichts Neues dar, indem sich Punkt 0 wie im vorigen Fall verhält, und die Punkte 1 und 2 dasselbe Verhalten zeigen wie im vorigen Falle Punkt 1.

III. **Die Punkte 3 und 4 in E mögen so an 1 heranrücken, dafs sie successive Punkte eines Kurvenzweiges werden, aber nicht auf einer Geraden liegen.**

Als Transformationsgleichungen für diesen Fall hat man:

$$\varrho y_1 = x_1 (x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2) = x_1 K,$$
$$\varrho y_2 = x_2 (x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2) = x_2 K,$$
$$\varrho y_3 = x_1^2 x_3;$$
$$\sigma x_1 = y_1 [y_1^2 - (y_1 + y_2) y_3] = y_1 K',$$
$$\sigma x_2 = y_2 [y_1^2 - (y_1 + y_2) y_3] = y_2 K',$$
$$\sigma x_3 = y_1 y_2 y_3.$$

Die Geraden $\overline{0\,1}$ und $\overline{0'\,1'}$ sind diesmal als dreifach zu zählende Fundamentallinien zu betrachten, da sie sich dreimal bei der Transformation absondern, wenn die Kurven in E' bezw. E durch $1', 3', 4'$ bez. $1, 3, 4$ gehen.

Für Punkt 0 erhält man nur etwas Neues, wenn man seine Richtung auf 1 hin betrachtet. Nämlich dem Durchgang einer Kurve in der angegebenen Richtung durch 0 entspricht eine vierpunktige Berührung der transformierten Kurve mit K' in $1'$. Denn für die erstere Kurve hat man die Reihe

$$\xi_1 = \alpha\xi_2^2 + \ldots,$$

woraus

$$\frac{y_1}{y_2} = \alpha\xi_2 + \ldots$$

und

$$\frac{y_3}{y_2} = \xi_2^2\,(\alpha^2 + \ldots)$$

folgt, welche Werte in die Gleichung von K' eingesetzt

$$\xi_2^4\,(\alpha^3 + \ldots) = 0$$

ergeben. Da sich der Faktor ξ_2^4 ausscheidet, hat die transformierte Kurve die angegebene Berührung mit K'.

Bei den einfachen Fundamentalpunkten ergibt sich eine Verschiedenheit von dem Früheren für Punkt 1.

Hat nämlich eine Kurve in 1 die Tangente $x_1 - \lambda x_3 = 0$, so berührt die entsprechende K' in $1'$ in erster Ordnung.

Denn man kann in diesem Falle setzen

$$\xi_1' = \lambda\xi_3' + \alpha\xi_3'^2 + \ldots$$

und erhält

$$\frac{y_1}{y_2} = \lambda\xi_3' + \alpha\xi_3'^2 + \ldots,$$

$$\frac{y_3}{y_2} = \xi_3'^2\left(\frac{\lambda^2}{\lambda+1} + \ldots\right),$$

was in die Gleichung von K' eingesetzt

$$\xi_3'^2\left(\frac{\lambda^3}{\lambda+1} + \ldots\right) = 0$$

gibt. Das Heraustreten des Faktors $\xi_3'^2$ bedeutet die zweipunktige Berührung von K' mit der transformierten Kurve.

Geht die erstere Kurve durch 1, 3 und 4, so geht die letztere durch einen Punkt der dem Fundamentalpunkt 1 zugeordneten Geraden $\overline{0'\,1'}$, dessen Lage von dem auf 1, 3 und 4 folgenden Punkt der ersten Kurve abhängig ist. In diesem Falle ist

$$\xi_1' = -\xi_3' + \xi_3'^2 + \alpha\xi_3'^3 + \ldots,$$

$$\frac{y_1}{y_2} = -\xi_3' + \xi_3'^2 + \alpha\xi_3'^3 + \ldots,$$

$$\frac{y_3}{y_2} = \frac{1}{1+\alpha} + \ldots,$$

und α bestimmt den auf 1, 3 und 4 folgenden Punkt der ersten Kurve.

Dieses Verhalten ist nicht mehr analog dem im II. Spezialfalle der quadratischen Transformationen beobachteten. Wenn dort, etwa in E, eine Kurve durch einen oder zwei der benachbarten Fundamentalpunkte ging, so ging die entsprechende ebenfalls durch einen oder zwei der successiven Fundamentalpunkte in E'. Hier dagegen geht die entsprechende Kurve durch zwei oder einen der aufeinanderfolgenden Fundamentalpunkte, wenn die ursprüngliche Kurve durch einen bezw. zwei geht. Dieses verschiedene Verhalten rührt daher, dafs im jetzigen Falle die drei Fundamentalpunkte successive auf einer Fundamentallinie liegen, während dies bei dem Fall der quadratischen Transformation nicht stattfand.

Berührt eine Kurve die Gerade $\overline{01}$ im Punkte 1, so haben wir

$$\xi_1' = \alpha\xi_3'^2 + \beta\xi_3'^3 + \gamma\xi_3'^4 + \dots$$
$$\frac{y_1}{y_2} = \alpha\xi_3'^2 + \beta\xi_3'^3 + \gamma\xi_3'^4 + \dots,$$
$$\frac{y_3}{y_2} = \alpha^2\xi_3'^4 + \alpha(2\beta - \alpha^2)\xi_3'^5 + \dots$$

Durch Einsetzen der zwei letzten Reihen in die Gleichung von K' findet sich

$$\alpha^2\xi_3'^5 + \dots = 0,$$

d. h. die entsprechende Kurve hat mit K' bei 1′ fünf Punkte gemein. Entwickelt man ferner $\eta_3' = \frac{y_3}{y_2}$ nach Potenzen von $\eta_1' = \frac{y_1}{y_2}$, so erhält man

$$\eta_3' = \eta_1'^{\frac{4}{2}} + \sqrt{\alpha}\,\eta_1'^{\frac{5}{2}} + \dots$$

Man sieht also, dafs die transformierte Kurve in 1′ einen Rückkehrpunkt zweiter Art hat.

Berührt aber die erste Kurve die Gerade $\overline{12}$ in 1, so ist

$$\xi_3' = \alpha\xi_1'^2 + \dots,$$
$$\frac{y_1}{y_2} = \xi_1'$$
$$\frac{y_3}{y_2} = \alpha\xi_1'^3 + \dots,$$

und die entsprechende Kurve hat in $1'$ einen Wendepunkt mit $1'3'$ als Tangente.

Analoges gilt für die Fundamentalpunkte in E'.

IV. **Die Punkte 2, 3, 4 mögen dem Punkt 1 benachbart werden, so dafs alle 4 successive Punkte werden, und keine drei auf einer Geraden liegen.**

In E' werden die Punkte $2', 3', 4'$ dem Punkt $1'$ in ganz ähnlicher Weise benachbart, wie dies in E mit den Punkten $2, 3, 4$ in Bezug auf 1 geschah.

Ist $x_1 = 0$ die Gerade $\overline{01}$, $x_3 = 0$ die Gerade $\overline{12}$ und $x_2 = 0$ eine beliebige Gerade durch 0, so erhält man für die Transformation die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varrho y_1 &= x_1 (x_1^2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = x_1 K, \\
\varrho y_2 &= x_2 (x_1^2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = x_2 K, \\
\varrho y_3 &= x_1^2 x_3. \\
\sigma x_1 &= y_1 (y_1^2 - y_1 y_3 - y_2 y_3) = y_1 K', \\
\sigma x_2 &= y_2 (y_1^2 - y_1 y_3 - y_2 y_3) = y_2 K', \\
\sigma x_3 &= y_1^2 y_3.
\end{aligned}$$

Fundamentalgerade gibt es in E und E' nur je eine, nämlich die Geraden $\overline{01}$ bezw. $\overline{0'1'}$, deren erstere jedem der benachbarten Punkte $1', 2', 3', 4'$, und deren letztere jedem der Punkte $1, 2, 3, 4$ zugeordnet sind. Sie sind deshalb vierfach als Fundamentalgerade zu zählen. So oft eine Kurve durch einen der benachbarten Fundamentalpunkte geht, so oft sondert sich bei der Transformation die zugeordnete Gerade ab.

Betreffs des Punktes 0 ist in diesem Fall als neu hervorzuheben, dafs dem Durchgang einer Kurve durch ihn mit der Tangente $\overline{01}$ eine fünfpunktige Berührung der transformierten Kurve mit K' entspricht, indem aus der Reihenentwickelung

$$\xi_1 = \alpha \xi_2^2 + \beta \xi_2^3 + \ldots$$

die Gleichungen

$$\frac{y_1}{y_2} = \alpha\xi_2 + \beta\xi_2^2 + \ldots,$$

$$\frac{y_3}{y_2} = \alpha^2\xi_2^2 + A\xi_2^3 + B\xi_2^4 + \Gamma\xi_2^5 + \ldots$$

folgen, wo

$$A = 2\alpha\beta - \alpha^3$$

$$\Gamma = 2\alpha\delta + 2\beta\gamma - \alpha^4 - 3\alpha^2\gamma - 3\alpha\beta^2 + 4\alpha^3\beta - \alpha^5$$

$$B = 2\alpha\gamma + \beta^2 - 3\alpha^2\beta + \alpha^4$$

ist. Diese Worte, in $K' = 0$ eingesetzt, ergeben dann

$$\alpha^4\xi_2^5 + \ldots. = 0,$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung hervorgeht.

Hat eine Kurve einen Zweig, welcher durch einen oder zwei der benachbarten Fundamentalpunkte geht, so hat die entsprechende einen Zweig, welcher durch drei bezw. zwei der successiven Fundamentalpunkte der anderen Ebene geht. Geht z. B. in E eine Kurve durch 1 mit der Tangentenrichtung $\lambda x_1 - x_3 = 0$, so kann man ξ_3' in die Reihe

$$\xi_3' = \lambda\xi_1' + \alpha\xi_1'^2 + \beta\xi_1'^3 + \ldots$$

entwickeln, welche

$$\frac{y_1}{y_2} = \xi_1'$$

$$\frac{y_3}{y_2} = \xi_1'^2 - \frac{1+\lambda}{\lambda}\xi_1'^3 + \ldots$$

ergibt; durch Einsetzen dieser Werte in $K' = 0$ erhält man dann

$$\frac{1}{\lambda}\xi_1'^3 + \ldots. = 0;$$

die entsprechende Kurve geht also, wie behauptet wurde, durch drei der einfachen Fundamentalpunkte in E'.

Geht die erste Kurve durch 1 und 2, so ist $\lambda = 0$, und die Reihenentwickelung lautet

$$\xi_3' = \alpha\xi_1'^2 + \beta\xi_1'^3 + \ldots,$$

mittelst welcher man nach Berechnung der Verhältnisse $\frac{y_1}{y_2}$ und $\frac{y_3}{y_2}$ Einsetzen derselben in $K' = 0$

$$\xi_3'^2 = \left(\frac{1}{\alpha+1} + \ldots.\right) = 0$$

findet, aus welcher Gleichung man sieht, dafs die transformierte Kurve auch durch zwei der successiven einfachen Fundamentalpunkte in E' geht.

Für eine Kurve, welche durch 1 in der Richtung $\overline{1\,0}$ geht, hat man

$$\xi_1' = \alpha\xi_3'^2 + \beta\xi_3'^3 + \gamma\xi_3'^4 + \delta\xi_3'^5 + \ldots,$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \alpha\xi_3'^2 + \beta\xi_3'^3 + \gamma\xi_3'^4 + \delta\xi_3'^5 + \ldots,$$

$$\frac{y_3}{y_2} = \alpha^2\xi_3'^4 + 2\alpha\beta\xi_3'^5 + (2\alpha\gamma + \beta - \alpha^3)\,\xi_3'^6 + (2\alpha\delta + 2\beta\gamma - \alpha^4 - 3\alpha^2\beta)\,\xi_3'^7 + \ldots,$$

mittelst Einsetzens in $K' = 0$:

$$\alpha^4\xi_3'^7 + \ldots = 0,$$

d. h. die entsprechende Kurve in E' schneidet K' in 7 Punkten, welche in der Nähe von $1'$ liegen. Entwickelt man ferner $\frac{y_3}{y_2}$ nach Potenzen von $\frac{y_1}{y_2}$, so erhält man eine nach Potenzen von $\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\frac{1}{2}}$ fortschreitende Reihe, welche mit $\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\frac{4}{2}}$ beginnt. Man sieht aus der weiteren Ausführung der Entwickelung, dafs die transformierte Kurve in $1', 2', 3', 4'$ einen Rückkehrpunkt höherer Art hat, bestehend aus drei aufeinanderfolgenden Doppelpunkten in $1', 2', 3'$ und einem darauffolgenden einfachen Punkt $4'$.

Ebenso ist das Verhalten der Fundamentalpunkte in E'.

V. Die Punkte 1, 2 und 3 in E mögen auf eine Gerade rücken, ohne dafs zwei von ihnen einander benachbart werden; 4 liege ebenfalls keinem der Fundamentalpunkte benachbart.

Sind $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ bezw. die Geraden $\overline{0\,1}$, $\overline{0\,2}$, $\overline{1\,2\,3}$, $\overline{3\,4}$, und ist Punkt 4 der Schnittpunkt von $\overline{3\,4}$ mit der Geraden $x_1 - ax_2 = 0$, so erhält man als Transformationsformeln:

$$\varrho y_1 = x_1x_3\,(x_1 - ax_2),$$
$$\varrho y_2 = x_2x_3\,(x_1 - ax_2),$$
$$\varrho y_3 = x_1x_2\,(x_1 + x_2 + x_3);$$

$$\sigma x_1 = y_1 (y_1 y_3 - y_1 y_2 - a y_2 y_3) = y_1 K',$$
$$\sigma x_2 = y_2 (y_1 y_3 - y_1 y_2 - a y_2 y_3) = y_2 K',$$
$$\sigma x_3 = y_1 y_2 (y_1 + y_2).$$

In E' liegt Punkt 4' in der Nähe von 0' auf dem Kegelschnitte K'.

Fundamentallinien sind in E die Geraden $\overline{0\,1}$, $\overline{0\,2}$, $\overline{0\,3}$, $\overline{0\,4}$ und der Kegelschnitt durch die 5 festen Punkte, welcher aber diesmal in die Geraden $\overline{0\,4}$ und $\overline{1\,2\,3}$ zerfällt; in E' hat man als Fundamentallinien den Kegelschnitt K' und die Geraden $\overline{0'\,1'}$, $\overline{0'\,2'}$, $\overline{0'\,3'}$ und $\overline{0'\,4'}$ (Tangente an K').

Wie im allgemeinen Falle der kubischen Transformationen ist dem Punkt 0 der Kegelschnitt K' zugeordnet, während den Punkten 1, 2, 3, 4 die Geraden $\overline{0'\,1'}$, $\overline{0'\,2'}$, $\overline{0'\,3'}$, $\overline{0'\,4'}$ bezw. zugeordnet sind.

Etwas Neues für den Doppelpunkt 0 gibt seine Richtung auf den mit den übrigen nicht auf einer Geraden liegenden einfachen Fundamentalpunkt 4 hin. Hat nämlich ein Kurvenzweig diese Richtung in 0, so findet man, wenn ξ_1 in die Reihe

$$\xi_1 = a\xi_2 + \alpha\xi_2^2 + \ldots.$$

entwickelt ist, nach der bisher immer angewandten Methode des Einsetzens der Verhältnisse $\frac{y_1}{y_3}$ und $\frac{y_2}{y_3}$ in die Gleichung von K'

$$(\Delta - A\alpha - \frac{\alpha}{a}\Gamma - aB)\,\xi_2^3 + \ldots = 0,$$

in welcher Gleichung

$$A = \frac{a\beta - a^2\alpha - a\alpha - \alpha^2}{a^2},$$

$$B = \frac{a^2\gamma + a\alpha^2 - 2a\alpha\beta - a^3\beta + a^4\alpha + 2a^3\alpha - a^2\beta + a^2\alpha + a^3}{a^3},$$

$$\Gamma = \beta - a\alpha - \alpha,$$

$$\Delta = \gamma - \alpha^2 - a\beta + a^2\alpha + 2a\alpha - \beta + \alpha$$

ist. Es folgt daraus, dafs der entsprechende Kurvenzweig den Kegelschnitt K' in 0' dreipunktig berührt.

Für die einfachen Punkte ergibt sich nur etwas von dem Früheren Verschiedenes, wenn man die Richtung eines der

drei auf einer Geraden liegenden Punkte auf die beiden anderen hin ins Auge fafst. Es entspricht einer solchen Richtung die Richtung des Punktes 0′ in der dem betrachteten Fundamentalpunkt zugeordneten Linie. Für die Richtung von 1 auf 2 oder 3 hin z. B., hat man

$$\xi_3' = \alpha \xi_1'^2 + \beta \xi_1'^3 + \ldots,$$

woraus

$$\frac{y_1}{y_3} = -a\alpha \xi_1'^2 + \ldots.,$$

$$\frac{y_2}{y_3} = -a\alpha \xi_1' + \ldots$$

gefunden wird.

Für die Umkehrung findet man, dafs dem Punkt 0′ in der Richtung 1′, 2′, 3′ die Richtung der Punkte 1, 2, 3 in der Fundamentalgeraden $\overline{1\,2\,3}$ entspricht. Doch ist dies kein Abweichen vom Verhalten im allgemeinen Fall, da man die Gerade $\overline{1\,2\,3}$, indem sie ein Teil des zerfallenden Fundamentalkegelschnittes in E ist, als Tangente dieses Kegelschnittes betrachten kann. Den einzelnen Richtungen durch 0′ entsprechen die einzelnen Punkte von $\overline{1\,2\,3}$.

Geht eine Kurve durch 0′ und 4′, so enwickeln wir $\eta_1 = \frac{y_1}{y_3}$ nach Potenzen von $\eta_2 = \frac{y_2}{y_3}$, wodurch wir

$$\eta_1 = a\eta_2 + a\eta_2^2 + \ldots.,$$

$$\frac{x_1}{x_2} = a + \alpha\eta_2 + \ldots.,$$

$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{a(a+1)}{\alpha - a} + \ldots$$

erhalten; man sieht daraus, dafs die transformierte Kurve durch einen Punkt der dem Punkt 4′ zugeordneten Geraden geht, dessen Lage von der Krümmung in 0′ abhängig ist.

VI. Die Lage der Punkte sei wie im vorigen Falle, nur 1 und 3 einander benachbart.

Liegt das Koordinatendreieck wieder wie beim vorhergehenden Fall, und ist der Punkt 4 der Schnitt von $x_1 + x_2 = 0$ mit $x_2 + x_3 = 0$, so lauten die Transformationsgleichungen:

$$\varrho y_1 = x_1 (x_1 + x_2) x_3$$
$$\varrho y_2 = x_2 (x_1 + x_2) x_3$$
$$\varrho y_3 = x_1^2 (x_2 + x_3)$$
$$\sigma x_1 = y_1 (y_1 y_3 + y_2 y_3 - y_1^2) = y_1 K',$$
$$\sigma x_2 = y_2 (y_1 y_3 + y_2 y_3 - y_1^2) = y_2 K',$$
$$\sigma x_3 = y_1^2 y_2.$$

In E' liegen die Punkte 1′ und 3′ einander benachbart auf $y_3 = 0$ am Punkt $(y_1 = 0,\ y_3 = 0)$. 4′ liegt 0′ benachbart auf K' und 2′ ist der Schnitt von $y_2 = 0$ mit $y_1 - y_3 = 0$.

Der Fall bietet nichts Neues. (Vergleiche I. und V.)

VII. **Die Lage der Punkte sei wie in V., nur liege 4 dem Punkt 2 benachbart.**

Für diesen Fall kann man als Transformationsgleichungen verwenden:

$$\varrho y_1 = x_1 x_2 x_3,$$
$$\varrho y_2 = x_2^2 x_3,$$
$$\varrho y_3 = x_1 (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2^2);$$
$$\sigma x_1 = y_1 (y_2 y_3 - y_1^2) = y_1 K',$$
$$\sigma x_2 = y_2 (y_2 y_3 - y_1^2) = y_2 K',$$
$$\sigma x_3 = y_1 y_2 (y_1 + y_2).$$

In E' liegt 1′ im Punkte $(y_1 = 0,\ y_3 = 0)$, die Punkte 2, und 4′ liegen successive auf K' dem Punkte 0′ benachbart, und 3′ ist der Schnittpunkt von K' mit $y_1 + y_2 = 0$, welcher nicht in 0′ fällt.

Eine Verschiedenheit von dem Früheren ergibt die Richtung des Punktes 0 auf 2 (oder 4) hin. Geht nämlich eine Kurve in dieser Richtung durch 0, so hat die entsprechende mit K' in 0′ eine Berührung dritter Ordnung; denn entwickelt man ξ_2 in die Reihe

$$\xi_2 = \alpha \xi_1^2 + \beta \xi_1^3 + \gamma \xi_1^4 + \ldots,$$

so erhält man

$$\frac{y_1}{y_3} = \alpha \xi_1 + \beta \xi_1^2 + (\gamma - \alpha^2)\, \xi_1^3 + \ldots,$$
$$\frac{y_2}{y_3} = \alpha^2 \xi_1^2 + 2\alpha\beta \xi_1^3 + (2\alpha\gamma + \beta^2 - \alpha^3)\, \xi_1^4 + \ldots,$$

welche Werte, in $K' = 0$ eingesetzt,

$$\alpha^3 \xi_1^4 + \ldots = 0$$

ergeben, aus welchem Ausdruck sich ξ_1^4 ausscheidet, wie behauptet wurde.

Für die einfachen Punkte ergibt sich etwas ganz Neues beim Punkt 2, welchem Punkt 4 benachbart ist. In den früher behandelten Fällen, bei welchen zwei der einfachen Fundamentalpunkte einander benachbart lagen, entsprachen die Richtungen durch einen von zwei solchen beisammen liegenden Punkten die Richtungen durch den analogen Punkt der anderen Ebene. Dies ist hier nicht mehr der Fall. Geht nämlich eine Kurve C durch 2 in der Richtung $\frac{x_2}{x_3} = \lambda$, so geht die entsprechende C' davon herrührend durch die benachbarten Punkte $0'$ und $2'$ mit einer von λ abhängigen Krümmung. Denn entwickelt man $\xi_2'' = \frac{x_2}{x_1}$ nach Potenzen von $\xi_3'' = \frac{x_3}{x_1}$, so erhält man

$$\xi_2'' = \lambda \xi_3'' + \alpha \xi_3''^2 + \beta \xi_3''^3 + \ldots,$$

$$\frac{y_1}{y_3} = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \xi_3'' + \ldots,$$

$$\frac{y_2}{y_3} = \frac{\lambda^2}{1 + \lambda} \xi_3''^2;$$

durch Einsetzen dieser Werte in $K' = 0$ ergibt sich dann:

$$\frac{\lambda^3}{(1 + \lambda)^2} \xi_3''^2 + \ldots = 0,$$

indem sich der Faktor $\xi_3''^2$ ausscheidet.

Berührt C die Gerade $\overline{0\,2}$ in 2, so ist $\lambda = 0$ und

$$\xi_2'' = \alpha \xi_3''^2 + \beta \xi_3''^3 + \gamma \xi_3''^4 + \ldots,$$

$$\eta_1 = \frac{y_1}{y_3} = \alpha \xi_3''^2 + (\beta - \alpha^2) \xi_3''^3 + (\gamma - 2\alpha\beta + \alpha^3) \xi_3''^4 + \ldots,$$

$$\eta_2 = \frac{y_2}{y_3} = \alpha^2 \xi_3''^4 + (2\alpha\beta - \alpha^3) \xi_3''^5 + \ldots$$

Zunächst findet man durch Einsetzen dieser Werte in K', daſs C' mit diesem 5 Punkte gemein hat, denn man erhält

$$\alpha^3 \xi_3''^5 + \ldots = 0.$$

Entwickelt man dann aus den obigen Reihen für η_1 und η_2, η_2 nach Potenzen von $\eta_1^{\frac{1}{2}}$, so findet sich

$$\eta_2 = \eta_1^{\frac{4}{2}} + \sqrt{\alpha}\,\eta_1^{\frac{5}{2}} + \ldots,$$

woraus man sieht, dafs C' einen Rückkehrpunkt zweiter Art in $0'$ hat mit $\overline{0'\,2'}$ als Tangente.

Berührt aber C beim Durchgang durch 2 die Gerade 1 2, so setzen wir

$$\xi_3'' = \alpha\xi_2''^2 + \beta\xi_2''^3 + \ldots$$

und finden

$$\eta_1 = \alpha\xi_2''^2 + \ldots,$$
$$\eta_2 = \alpha\xi_2''^3 \ldots$$

Durch Entwickelung von η_2 nach Potenzen von η_1 ergibt sich

$$\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,y_1^{\frac{3}{2}} + \ldots,$$

woraus erhellt, dafs C' in $0'$ einen gewöhnlichen Rückkehrpunkt mit der Tangente $\overline{0'\,2'}$ hat.

Geht C durch 2 und 4, so geht analog den früheren Fällen C' durch einen Punkt der dem Punkt 2 zugeordneten Geraden $\overline{0'\,2'}$, dessen Lage von der Krümmung von C in 2 linear abhängt.

Für die Umkehrung ist noch zu erwähnen, dafs, wenn eine Kurve durch $0'$, $2'$ und $4'$ geht, die transformierte durch einen Punkt von 0 2 geht, dessen Lage von der zweiten Krümmung von C' in $0'$ linear abhängt, indem

$$\eta_2 = \eta_1^2 + \alpha\eta_1^3 + \ldots$$

und daher

$$\xi_1 = \alpha - (\alpha^2 + \alpha - \beta)\,\eta_1 + \ldots,$$
$$\xi_2 = \alpha\eta_1 + (\beta - \alpha)\,\eta_1^2 + \ldots$$

ist.

VIII. **Lage der Punkte wie im vorhergehenden Falle, nur 1 und 3 ebenfalls einander benachbart.**

Die Transformationsformeln für diesen Fall sind:

$$\begin{aligned}
\varrho y_1 &= x_1 x_2 x_3,\\
\varrho y_2 &= x_2^2 x_3,\\
\varrho y_3 &= x_1^2 (x_2 + x_3);\\
\sigma x_1 &= y_1 (y_2 y_3 - y_1^2) = y_1 K',\\
\sigma x_2 &= y_2 (y_2 y_3 - y_1^2) = y_2 K',\\
\sigma x_3 &= y_1^2 y_2.
\end{aligned}$$

In E' liegen $0', 2'$ und $4'$ successive auf K'; $1'$ und $3'$ sind ebenfalls einander benachbart.

Der Fall bietet gar nichts Neues dar. Vergl. VI. und VII.

IX. **Die Punkte 1, 3 und 4 seien einander benachbart, ohne auf einer Geraden zu liegen, während dies bei 1, 2 und 3 der Fall ist.**

Transformationsgleichungen:

$$\begin{aligned}
\varrho y_1 &= x_1^2 x_3,\\
\varrho y_2 &= x_1 x_2 x_3,\\
\varrho y_3 &= x_2 (x_1^2 x_2 x_3);\\
\sigma x_1 &= y_1 (y_1 y_3 + y_2^2) = y_1 K',\\
\sigma x_2 &= y_2 (y_1 y_3 + y_2^2) = y_2 K',\\
\sigma x_3 &= y_1^2 y_2.
\end{aligned}$$

In E' werden $0', 1', 3' 4'$ successive Punkte des Kegelschnittes K'.

Abweichendes von dem Früheren ergibt die Richtung $0\,\bar{1}$ von 0. Setzt man nämlich

$$\xi_1 = \alpha \xi_2^2 + \beta \xi_2^3 + \ldots,$$

so ergibt sich durch Einsetzen der mittelst dieser Reihe berechneten Verhältnisse $\frac{y_1}{y_3}$ und $\frac{y_2}{y_3}$ in $K' = 0$

$$\alpha_4 \xi_2^5 + \ldots = 0,$$

d. h. wenn eine Kurve C in E die Gerade $0\,\bar{1}$ in 0 berührt, hat die transformierte in E' eine Berührung vierter Ordnung mit K' in $0'$.

Geht eine Kurve durch 1 mit der Tangentenrichtung $x_3 - \lambda x_1 = 0$, so hat man

$$\xi_3' = \lambda \xi_1' + \alpha \xi_1'^2 + \beta \xi_1'^3 + \ldots$$

und man erhält immer unter Anwendung der bisherigen Methode

$$\frac{1}{\lambda} \xi_1'^3 + \ldots = 0,$$

d. h. die entsprechende hat mit K' in $0'$ eine Berührung zweiter Ordnung.

Berührt die erste Kurve die Gerade $\overline{1\,3}$, so ist $\lambda = 0$, also

$$\xi_3' = \alpha \xi_1'^2 + \beta \xi_1'^3 + \ldots,$$

und man findet schliefslich auf dieselbe Weise wie vorhin

$$\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \xi_1'^2 + \ldots = 0,$$

womit gezeigt ist, dafs die transformierte Kurve den Kegelschnitt K' in $0'$ in erster Ordnung berührt.

Berührt sie aber die Gerade $\overline{0\,1}$, so mufs man

$$\xi_1' = \alpha \xi_3'^2 + \beta \xi_3'^3 + \gamma \xi_3'^4 + \delta \xi_3'^5 + \ldots$$

setzen und erhält schliefslich aus $K' = 0$ die Gleichung

$$\alpha^4 \xi_3'^7 + \ldots = 0,$$

woraus folgt, dafs die entsprechende Kurve in der Nähe von $0'$ den Kegelschnitt K' in 7 Punkten schneidet. Entwickelt man dann wieder $\frac{y_1}{y_3}$ nach Potenzen von $\frac{y_2}{y_3}$, so erhält man eine nach Potenzen von $\left(\frac{y_2}{y_3}\right)^{\frac{1}{2}}$ fortschreitende Reihe, welche mit $\left(\frac{y_2}{y_3}\right)^{\frac{7}{2}}$ beginnt. Man sieht aus der Ausführung der Entwickelung, dafs C'' an der betreffenden Stelle einen höheren Rückkehrpunkt hat, der zusammengesetzt zu denken ist aus einem Rückkehrpunkt und zwei darauffolgenden Doppelpunkten. Betreffs des Punktes 1 und 2 vergleiche im übrigen III.

Für die Umkehrung ist noch zu bemerken, dafs, wenn eine Kurve durch die Punkte $0'$, $1'$ $3'$ $4'$ geht, die entsprechende durch einen von der Lage des auf diese vier folgenden fünften Punktes abhängigen Punkt von $\overline{0\,1}$ geht.

X. **Die Punkte 1, 2 und 3 mögen einander benachbart auf einer Geraden liegen, Punkt 4 getrennt von ihnen.**

Ist $x_1 = 0$ die Gerade $\overline{0\,1}$, $x_2 = 0$ die Gerade $\overline{0\,4}$ und $x_3 = 0$ die Gerade $1\,\overline{2\,3}$, so hat man für die Transformation die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varrho y_1 &= x_1 x_2 x_3,\\
\varrho y_2 &= x_2^2 x_3,\\
\varrho y_3 &= x_1^2 (x_1 + x_3);\\
\sigma x_1 &= y_1 (y_2 y_3 - y_1^2) = y_1 K',\\
\sigma x_2 &= y_2 (y_2 y_3 - y_1^2) = y_2 K',\\
\sigma x_3 &= y_1^3.
\end{aligned}$$

In E' sind die Punkte $1', 2', 3'$ ebenfalls einander benachbart und liegen auf dem Fundamentalkegelschnitt K' an dem Punkt $(y_1 = y_3 = 0)$; $4'$ liegt $0'$ benachbart ebenfalls auf K', und $\overline{0'\,4'}$ ist die Linie $y_2 = 0$, während $y_1 = 0$ die Gerade $\overline{0'\,1'}$ ist.

Punkt 0 verhält sich, wie der analoge Punkt in III, wenn man seine beliebigen Richtungen und die auf 1 hin betrachtet; die Richtung $\overline{0\,4}$ verhält sich wie die entsprechende in V. Betreffs der Punkte 1 und 4 vergleiche man ebenfalls III.

Für die Umkehrung wäre noch zu bemerken, dafs dem Durchgehen einer Kurve in E' durch $0'$ in der Richtung $\overline{0'\,1'}$ das Durchgehen der transformierten Kurve durch 1, 2, 3 und noch einen vierten darauffolgenden Punkt der Geraden $1\,\overline{2\,3}$ entspricht. Dies ist übrigens auch nur ein spezieller Fall des in III Gesagten, indem die Gerade $\overline{1\,2\,3}$ ein Teil des zerfallenden Fundamentalkegelschnittes von E ist.

XI. **Die vier Punkte 1, 2, 3, 4 mögen einander benachbart werden, und drei davon auf einer Geraden liegen.**

Transformationsformeln:

$$\begin{aligned}
\varrho y_1 &= x_1^2 x_3,\\
\varrho y_2 &= x_1 x_2 x_3,\\
\varrho y_3 &= x_1^3 + x_2^2 x_3,
\end{aligned}$$

Umkehrung:

$$\sigma x_1 = y_1 (y_1 y_3 - y_2^2) = y_1 K',$$
$$\sigma x_2 = y_2 (y_1 y_3 - y_2^2) = y_2 K',$$
$$\sigma x_3 = y_1^3.$$

In E' rücken sämtliche einfachen Punkte in die Nähe von $0'$, so dafs sie successive Punkte eines Kurvenzweiges werden. Die Gerade $y_1 = 0$ ist die Verbindungslinie von $0'$ mit $1'$ und als vierfache Fundamentalgerade aufzufassen. Fundamentallinie ist aufserdem noch der Kegelschnitt K'.

Für den Punkt 0 ergibt sich insofern etwas Neues, als, wenn eine Kurve durch 0 geht mit der Tangentenrichtung $0\,\overline{1}$, die entsprechende mit K' in $0'$ eine sechspunktige Berührung hat. Dieses Verhalten ist aber ganz analog dem von 0 im IV. Spezialfall. Ging dort eine Kurve durch 0 mit der Tangente $\overline{0\,1}$, so hatte die entsprechende mit dem dortigen Kegelschnitt K' eine fünfpunktige Berührung an der Stelle, wo die einfachen Punkte lagen. Da hier aber die einfachen Punkte in der Nähe von $0'$ liegen, mufs die transformierte Kurve auch noch durch $0'$ gehen, so dafs man keine fünf-, sondern eine sechspunktige Berührung erhält.

Hält man letztere Bemerkung fest, so bietet auch das Verhalten von Punkt 1 gar nichts Neues dar; es sei nur bemerkt, dafs, wenn eine Kurve durch 1 in der Richtung $1\,0$ geht, die entsprechende in $0'$ einen höheren Rückkehrpunkt hat, welcher besteht aus vier aufeinanderfolgenden Doppelpunkten mit Verzweigung und einem Punkte in $4'$, so dafs die Kurve den Kegelschnitt K' in 9 Punkten schneidet.

XII. **Punkt 4 möge dem Punkt 0 benachbart werden, die Punkte 1, 2, 3 getrennt von ihm und von einander, und nicht auf einer Geraden.**

Siehe V.

XIII. **Die Lage der Punkte, wie vorher, nur Punkt 3 dem Punkte 1 benachbart.**

Siehe VI.

XIV. **Die Punkte 1, 2, 3 seien einander benachbart, ohne auf einer Geraden zu liegen, 4 liege in der Nähe von 0.**

Siehe X.

XV. **Punkt 4 liege wieder bei 0; 1, 2, 3 getrennt von diesen und von einander, aber auf einer Geraden.**

Sind $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ bezw. die Geraden $\overline{0\,1}$, $\overline{0\,2}$, $1\,2\,3$, ist ferner $x_3 + x_2 = 0$ die Gleichung von $\overline{0\,4}$, und der Punkt 3 der Schnitt von $x_3 = 0$ mit $x_1 + ax_2 = 0$, so so hat man als Transformationsgleichungen:

$$\begin{aligned}
\varrho y_1 &= x_1 x_3 (x_1 + x_2),\\
\varrho y_2 &= x_2 x_3 (x_1 + x_2),\\
\varrho y_3 &= x_1 x_2 (x_1 + a x_2);\\
\sigma x_1 &= y_1 y_3 (y_1 + y_2),\\
\sigma x_2 &= y_2 y_3 (y_1 + y_2),\\
\sigma x_3 &= y_1 y_2 (y_1 + a y_2).
\end{aligned}$$

Wie man sieht, liegen in E' die Fundamentalpunkte ebenso wie in E.

Der Fall bietet nichts Neues dar.

XVI. **Punkt 4 liege bei 0; 1, 2, 3 auf einer Geraden, 1 und 3 einander benachbart.**

Transformationsformeln:

$$\begin{aligned}
\varrho y_1 &= x_1 (x_1 + x_2) x_3,\\
\varrho y_2 &= x_2 (x_1 + x_2) x_3,\\
\varrho y_3 &= x_1^2 x_2;
\end{aligned}$$

$$\sigma x_1 = y_1 (y_1 + y_2) y_3,$$
$$\sigma x_2 = y_2 (y_1 + y_2) y_3,$$
$$\sigma x_3 = y_1^2 y_2.$$

XVII. **Die Lage der Fundamentalpunkte sei wie im vorigen Falle, nur 2 auch noch den Punkten 1 und 3 benachbart.**

Als Transformationsformeln kann man nehmen:

$$\varrho y_1 = x_1 (x_1 + x_2) x_3,$$
$$\varrho y_2 = x_2 (x_1 + x_2) x_3,$$
$$\varrho y_3 = x_1^3;$$
$$\sigma x_1 = y_1 (y_1 + y_2) y_3,$$
$$\sigma x_2 = y_2 (y_1 + y_2) y_3,$$
$$\sigma x_3 = y_1^3.$$

Die beiden letzten Fälle enthalten ebenfalls nichts Neues.

XVIII. **Die Punkte 3 und 4 mögen in die Nähe von 0 rücken, so dafs sie successive werden, 1 und 2 getrennt von diesen und von einander.**

Siehe VII.

XIX. **Die Lage der Fundamentalpunkte sei wie im vorhergehenden Falle, nur seien 1 und 2 einander benachbart.**

Siehe VIII.

XX. **Die Punkte 1 und 2 seien in der Nähe von 0, die Richtungen $\overline{01}$ und $\overline{02}$ endlich verschieden von einander; 3 und 4 getrennt von einander.**

Sind wieder $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ bezw. die Gleichungen der Geraden $\overline{01}$, $\overline{02}$, $\overline{34}$, und sind die Schnittpunkte von $x_3 = 0$ mit den Geraden $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 + a x_2 = 0$ bezw. die Punkte 3 und 4, so erhält man die Transformationsformeln:

$$\varrho y_1 = x_1 (x_1 + x_2)(x_1 + \alpha x_2),$$
$$\varrho y_2 = x_2 (x_1 + x_2)(x_1 + \alpha x_2),$$
$$\varrho y_3 = x_1 x_2 x_3;$$
$$\sigma x_1 = y_1^2 y_2,$$
$$\sigma x_2 = y_1 y_2^2,$$
$$\sigma x_3 = y_3 (y_1 + y_2)(y_1 + \alpha y_2).$$

In E' sind die Punkte 3′ und 4′ dem Punkte 0′ benachbart, und zwar liegen sie auf den Geraden $y_1 + y_2 = 0$ bezw. $y_1 + \alpha y_2 = 0$.

Dieser Fall unterscheidet sich von den früheren dadurch, dafs den Richtungen von 0 nicht mehr die Punkte einer Linie entsprechen, sondern die Richtungen von 0′.

Denn wenn

$$\xi_1 = \lambda \xi_2 + \alpha \xi_2^2 + \ldots$$

ist, so erhält man

$$\frac{y_1}{y_3} = (\lambda^2 + (\alpha + 1)\lambda + \alpha)\xi_2 + (2\alpha\lambda + (\alpha + 1)\alpha)\xi_2^2 + \ldots,$$
$$\frac{y_2}{y_3} = \frac{\lambda^2 + (\alpha + 1)\lambda + \alpha}{\lambda}\xi_2 + \frac{\alpha\lambda^2 - \alpha}{\lambda^2}\xi_2^2 + \ldots$$
$$\frac{y_1}{y_2} = \lambda + \ldots.$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Der geometrische Grund dieses Verhaltens ist durch eine ganz ähnliche Betrachtung, wie sie auf S. 10 angestellt wurde, einzusehen.

Berührt eine Kurve die Gerade $\overline{0\,1}$ in 0, so ist $\lambda = 0$ und daher

$$\frac{y_1}{y_3} = \alpha\xi_2 + \alpha(\alpha + 1)\xi_2^2 + \ldots,$$
$$\frac{y_2}{y_3} = \frac{\alpha}{\alpha} + (\alpha + 1)\xi_2 + \ldots,$$

d. h. die entsprechende geht durch einen von der ersten Krümmung der ersteren in 0 linear abhängigen Punkt von $\overline{0'\,1'}$, ohne diese Gerade zu berühren.

Analog verhält sich die Richtung $\overline{0\,2}$.

Geht eine Kurve durch 0, indem sie die Gerade $\overline{0\,3}$ $(x_1 + x_2 = 0)$ berührt, so ist

$$\xi_1 = -\xi_2 + \alpha\xi_2^2 + \beta\xi_2^3 + \ldots$$
$$\frac{y_1}{y_2} = \alpha(a-1)\xi_2^2 + (\alpha^2 + a\beta - \beta)\xi_2^3 + \ldots$$
$$\frac{y_2}{y_3} = -\alpha(a-1)\xi_2^2 - (a\beta - \beta + a\alpha^2)\xi_2^3 + \ldots,$$
$$\frac{y_1 + y_2}{y_3} = \alpha^2(1-a)\xi_2^3 + \ldots$$

Daraus folgt dann

$$\frac{y_1 + y_2}{y_3} = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha(a-1)}}\left(\frac{y_1}{y_3}\right)^{\frac{3}{2}} + \ldots;$$

die transformierte Kurve hat also in $0'$ einen Rückkehrpunkt erster Art mit der Tangente $y_1 + y_2 = 0$.

Ähnliches ergibt sich für die Richtung $0\,4$. Den Richtungen durch die Punkte 3 und 4 entsprechen, wie früher, die Punkte der Fundamentalgeraden $0'3'$ bezw. $\bar{0}'4'$. Geht speziell eine Kurve durch 3 oder 4 mit der Tangentenrichtung $\overline{3\,0}$ bezw. $4\,\bar{0}$, so hat die transformierte in $0'$ einen Wendepunkt mit $0'\bar{3}'$ bezw. $\bar{0}'4'$ als Tangente. Denn in diesem Falle ist z. B. für Punkt 3:

$$\xi_1' + 1 = \alpha\xi_3'^2 + \beta\xi_3'^3 + \gamma\xi_3'^4 + \ldots,$$
$$\frac{y_1}{y_3} = \alpha(a-1)\xi_3' + \beta(a-1)\xi_3'^2 + (\alpha^2 + a\gamma - \gamma)\xi_3'^3 + \ldots,$$
$$\frac{y_2}{y_3} = -\alpha(a-1)\xi_3' + \beta(a-1)\xi_3'^2 - (a\alpha^2 + a\gamma - \gamma)\xi_3'^3 + \ldots,$$

also

$$\frac{y_1 + y_2}{y_3} = -\alpha^2(a-1)\xi_3'^3 + \ldots,$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung erhellt.

Für die übrigen Punkte ergibt sich nichts Neues.

XXI. **Die Lage der Punkte sei wie im vorigen Falle, nur 3 und 4 einander benachbart.**

Transformationsformeln:

$$\varrho y_1 = x_1(x_1 + x_2)^2,$$
$$\varrho y_2 = x_2(x_1 + x_2)^2,$$
$$\varrho y_3 = x_1 x_2 x_3;$$

$$\sigma x_1 = y_1^2 y_2,$$
$$\sigma x_2 = y_1 y_2^2,$$
$$\sigma x_3 = (y_1 + y_2)^2 y_3$$

In E' rücken 3′ und 4′ so in die Nähe von 0′, dafs die Richtungen $\overline{0'3'}$ und 0′ 4′ einander benachbart sind, dafs also alle Kurven 3. Ordnung der durch die fünf Punkte gehenden Schaar dort einen gewöhnlichen Rückkehrpunkt mit fester Tangente haben.

Für diesen Fall ist hervorzuheben die Richtung $\overline{0\,3}$ von 0. Es ist nämlich

$$\xi_1 = -\xi_2 + \alpha\xi_2^2 + \beta\xi_2^3 + \ldots$$
$$\frac{y_1}{y_3} = \alpha^2\xi_2^3 + 2\alpha\beta\xi_2^4 + \ldots,$$
$$\frac{y_2}{y_3} = -\alpha^2\xi_2^3 - (\alpha^3 + 2\alpha\beta)\xi_2^4 + \ldots,$$
$$\frac{y_1 + y_2}{y_3} = -\alpha^3\xi_2^4 + \ldots$$

Man sieht daraus, dafs die entsprechende Kurve in 0′ einen dreifachen Punkt hat. Die Gerade $y_1 + y_2 = 0$ wird an dieser Stelle von der Kurve in 4 Punkten geschnitten. Der dreifache Punkt ist, wie man auch durch quadratische Transformation der Kurve sehen kann, ein einziger Zweig, also zusammengesetzt zu denken aus zwei Rückkehrpunkten erster Art und einem gewöhnlichen Doppelpunkt.

Den verschiedenen Richtungen durch 3 entsprechen die ersten Krümmungen von Kurven in 0′ mit der Tangente $\overline{0'3'}$. Dies ist auch nichts Neues, wenn man beachtet, dafs z. B. im Spezialfall I den Richtungen durch den ausgezeichneten einfachen Fundamentalpunkt 1 (oder 3) die Richtungen durch 1′ (oder 3′) entsprachen. Da nun in unserem Falle Punkt 3′ in der Nähe von 0′ liegt, so können den Richtungen durch 3 nicht mehr die Richtungen von 3′ entsprechen, weil ja die transformierten Kurven alle auch durch 0′ gehen müssen, so dafs also, wie vorher erwähnt, den einfach unendlich vielen Richtungen durch 3 die einfach unendlich vielen ersten Krümmungen der transformierten Kurven in 0′ entsprechen.

Für die Umkehrung ist noch zu bemerken, dafs, wenn eine Kurve in E' einen Rückkehrpunkt mit der Tangente $\overline{0'3'}$ hat, die entsprechende in E durch einen Punkt von $0\overline{3}$ geht, dessen Lage durch den auf $0'$, $3'$ und $4'$ folgenden Punkt der Kurve in E' bestimmt ist. Denn man kann, wenn $\eta_1 = \frac{y_1}{y_3}$, $\eta_2 = \frac{y_2}{y_3}$ ist, setzen

$$\eta_1 = -\eta_2^{\frac{2}{2}} + \alpha\eta_2^{\frac{3}{2}} + \beta\eta_2^{\frac{4}{2}} + \dots$$

und erhält daraus

$$\xi_1' = \frac{x_1}{x_2} = \frac{\eta_1}{\eta_2} = -1 + \alpha\eta_2^{\frac{1}{2}} + \dots,$$

$$\xi_3' = \frac{x_3}{x_2} = -\alpha^2 - 2\alpha\beta\eta_2^{\frac{1}{2}} + \dots,$$

womit die Richtigkeit der Behauptung erwiesen ist.

XXII. **Die Punkte 2, 3, 4 mögen in die Nähe von 0 rücken, so dafs sie successiv werden.**

Siehe IX.

XXIII. **Die Punkte 2, 3 und 4 seien wieder in der Nähe von 0, die Richtungen $\overline{02}$ und $\overline{03}$ endlich von einander verschieden, 0, 2 und 4 successiv.**

Sind $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$ bezw. die Gleichungen der Geraden $0\overline{1}$, $\overline{02}$, $0\overline{3}$, so kann man als Transformationsformeln nehmen:

$$\begin{aligned}
\varrho y_1 &= x_2^1 x_2,\\
\varrho y_2 &= x_1 x_2^2,\\
\varrho y_3 &= x_2 (x_1 + x_2) x_3 + x_1^3;\\
\sigma x_1 &= y_1 y_2 (y_1 + y_2),\\
\sigma x_2 &= y_2^2 (y_1 + y_2),\\
\sigma x_3 &= y_1 (y_2 y_3 - y_1^2).
\end{aligned}$$

In E' liegt $1'$ in der Nähe von $0'$; $2'$ und $4'$ ebenfalls, aber in anderer Richtung; $0', 2'$ und $4'$ sind successiv.

Der Fall zeigt nichts Merkwürdiges.

XXIV. **Die sämtlichen einfachen Fundamentalpunkte mögen in die Nähe von 0 rücken, so dafs sie successiv werden.**

Siehe XI.

XXV. **Punkt 1 rücke in die Nähe von 0, 2 ebenfalls, aber in anderer Richtung, 3 und 4 mögen auf 0 und 2 folgen.**

Zur Transformation kann man die Gleichungen benützen:

$$\begin{aligned}
\varrho y_1 &= x_1 x_2^2, \\
\varrho y_2 &= x_2^3, \\
\varrho y_3 &= x_1 (x_2 x_3 + x_1^2); \\
\sigma x_1 &= y_1^2 y_2. \\
\sigma x_2 &= y_1 y_2^2, \\
\sigma x_3 &= y_2^2 y_3 - y_1^3.
\end{aligned}$$

In E' entsteht ein Rückkehrpunkt mit $0'\,2'$ als Tangente; $2', 3'$ und $4'$ liegen bei $0', 1'$ getrennt davon.

Hervorzuheben ist bei diesem Fall, dafs, wenn eine Kurve durch 0 und 2 geht, die entsprechende in $0'$ einen Rückkehrpunkt mit der Tangente $0'\,2'$ hat und dabei nur durch 3 der Punkte $0', 2', 3', 4'$ geht, also jede der Kurven dritter Ordnung der durch die 5 Punkte gehenden Schaar in 6 Punkten schneidet. Denn man kann für die erste Kurve setzen

$$\xi_2 = \alpha \xi_1^2 + \beta \xi_1^3 + \ldots$$

und findet

$$\begin{aligned}
\frac{y_1}{y_3} &= \frac{\alpha^2}{1+\alpha} \xi_1^2 + \ldots, \\
\frac{y_2}{y_3} &= \frac{\alpha^3}{1+\alpha} \xi_1^3 + \ldots,
\end{aligned}$$

was, in

$$y_2^2 y_3 - y_1^3 = 0$$

eingesetzt,

$$\frac{\alpha^7}{(1+\alpha)^3}\xi_2^6 + \ldots = 0$$

ergibt, wie behauptet wurde.

Geht die erstere Kurve aber durch 0, 2 und 3, so setzen wir

$$\xi_2 = -\xi_1^3 + \alpha\xi_1^3 + \ldots,$$

woraus sich

$$\frac{y_1}{y_3} = \frac{1}{\alpha}\xi_1 + \ldots,$$
$$\frac{y_2}{y_3} = -\frac{1}{\alpha}\xi_1^2 + \ldots$$

ergibt, d. h. die transformierte Kurve berührt $0'2'$ in $0'$.

XXVI. **Die Punkte 1 und 3 mögen in die Nähe von 0 rücken, dafs sie successiv werden, ebenso 2 und 4; die Richtungen 0 1 und 0 2 endlich verschieden von einander.**

Transformationsgleichungen:

$$\varrho y_1 = x_1^2 x_2,$$
$$\varrho y_2 = x_1 x_2^2,$$
$$\varrho y_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1^3 + x_2^3;$$
$$\sigma x_1 = y_1^2 y_2,$$
$$\sigma x_2 = y_1 y_2^2,$$
$$\sigma x_3 = y_1 y_2 y_3 - y_1^3 - y_2^3.$$

Die Lage der Fundamentalpunkte in E' ist analog wie die in E.

Vergleiche XIII.

XXVII. **Die Punkte 3 und 4 mögen in die Nähe von 0 rücken, so dafs auch die Richtungen $\overline{0\,3}$ und $\overline{0\,4}$ benachbart werden; 1 und 2 getrennt von diesen und von einander.**

Siehe XXI.

XXVIII. **Punkt 2 möge auch noch an 3 und 4 heranrücken, so dafs die Punkte successiv werden.**

Siehe XXV.

XXIX. **Punkt 1 rücke auch noch an die anderen heran.**

Transformationsgleichungen:

$$\begin{aligned}
\varrho y_1 &= x_1^3,\\
\varrho y_2 &= x_1^2 x_2,\\
\varrho y_3 &= x_1^2 x_3 + x_2^3;\\
\sigma x_1 &= y_1^3,\\
\sigma x_2 &= y_1^2 y_2,\\
\sigma x_3 &= y_1^2 y_3 - y_2^3.
\end{aligned}$$

Die Lage der Fundamentalpunkte in E' ist analog der in E.

Den Richtungen durch 0 entsprechen wieder die Richtungen durch $0'$.

Geht eine Kurve C in E durch 0 mit der Tangente $\overline{01}$, hat sie also mit jeder der Kurven dritter Ordnung, welche durch die benachbarten Fundamentalpunkte gehen, drei Punkte gemein, so setzen wir

$$\xi_1 = \alpha\xi_2^2 + \beta\xi_2^3 + \gamma\xi_2^4 + \dots$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{y_1}{y_3} &= \alpha^3\xi_2^3 + (3\alpha^2\beta - \alpha^5)\xi_2^4 + \dots,\\
\frac{y_2}{y_3} &= \alpha^2\xi_2^2 + (2\alpha\beta - \alpha^4)\xi_2^3 + \dots
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Werte in

$$y_1^2 y_3 - y_2^3 = 0$$

ergibt sich

$$\alpha^8\xi_2^7 + \dots = 0.$$

Die entsprechende Kurve C' hat also mit den Kurven dritter Ordnung in E' 7 Punkte gemein, d. h. sie hat in $0'$ einen Rückkehrpunkt mit der Tangente $\overline{0'1'}$ und geht aufserdem noch durch einen weiteren der dort liegenden einfachen Fundamentalpunkte.

Eine Kurve, welche in 0 mit den Kurven dritter Ordnung 4 Punkte gemein hätte, gibt es nicht, wie man sich leicht überzeugen kann. Vielmehr mufs jede Kurve, welche mehr als 3 Punkte mit ihnen gemein hat, einen Rückkehrpunkt an der Stelle mit der Tangente 0 1 haben, so dafs sie dieselben mindestens in 6 Punkten schneidet. Für eine solche Kurve ist

$$\xi_1 = \alpha \xi_2^{\frac{3}{2}} + \beta \xi_2^{\frac{4}{2}} + \ldots = \alpha \lambda_3 + \beta \lambda^4 + \ldots,$$

also

$$\frac{y_1}{y_3} = \frac{\alpha^3}{\alpha^2 + 1} \lambda^3 + \ldots,$$
$$\frac{y_2}{y_3} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 1} \lambda^2 + \ldots,$$

setzt man diese Werte in die Gleichung

$$y_1^2 y_3 - y_2^3 = 0$$

ein, so erhält man

$$\frac{\alpha^8}{(\alpha^2 + 1)^3} \lambda^6 + \ldots = 0,$$

d. h. die entsprechende Kurve in E' hat in $0'$ einen Rückkehrpunkt mit der Tangente $0'\,1'$ ohne mit den Kurven dritter Ordnung noch einen weiteren Punkt gemein zu haben.

Geht eine Kurve in E durch sämtliche Fundamentalpunkte, so hat man

$$\xi_1 = \pm i \xi_2^{\frac{3}{2}} + \alpha \xi_2^{\frac{5}{2}} + \ldots = \pm i \lambda^3 + \alpha \lambda^5 + \ldots,$$
$$\frac{y_1}{y_3} = -\frac{1}{2\alpha} \lambda + \ldots,$$
$$\frac{y_2}{y_3} = -\frac{1}{2\alpha i} + \ldots$$

woraus man sieht, dafs die entsprechende Kurve in E' durch einen Punkt der Fundamentalgeraden $0'\,1'$ geht, dessen Lage von dem auf die Fundamentalpunkte folgenden Punkt der Kurven in E abhängt.

Damit sind sämtliche Spezialfälle erschöpft.

Raumtransformationen.

A.

Allgemeiner Fall.

Läfst man den dreifach unendlich vielen Ebenen eines Raumes R die dreifach unendlich vielen Flächen 2. Ordnung eines anderen Raumes R', welche sämtlich durch einen festen Punkt P' und einen festen Kegelschnitt K' gehen, projektivisch entsprechen, so entspricht jedem Punkt in R eindeutig ein Punkt in R'. Ein ähnliches Entsprechen findet dann aber auch umgekehrt statt, indem den Ebenen in R' Flächen 2. Ordnung in R entsprechen, welche ebenfalls durch einen festen Punkt P und einen festen Kegelschnitt K gehen.

Die Koordinaten in R seien mit x bezeichnet, die in R' mit y. Ist $(x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0)$ der Punkt P und sind $x_4 = 0$ und $x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2 = 0$ die Gleichungen des Kegelschnittes K, so kann man als Transformationsformeln nehmen:

$$\begin{aligned} \varrho y_1 &= x_1x_4, \\ \varrho y_2 &= x_2x_4, \\ \varrho y_3 &= x_3x_4, \\ \varrho y_4 &= x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2, \end{aligned}$$

deren Umkehrung

$$\begin{aligned} \sigma x_1 &= y_1y_4, \\ \sigma x_2 &= y_2y_4, \\ \sigma x_3 &= y_3y_4, \\ \sigma x_4 &= y_2y_3 + y_2y_1 + y_1y_2 \end{aligned}$$

ergibt. Wie man sieht, sind die Koordinaten von P' $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ und die Gleichungen von K'

$$y_4 = 0 \text{ und } y_2y_3 + y_3y_1 + y_1y_2 = 0.$$

Fundamentalgebilde in R sind der Punkt P, der Kegelschnitt K und die Mantellinien des über K stehenden Kegels, welcher seine Spitze in P hat; in R' die analogen Gebilde.

Dem Punkt P ist die Ebene E' des Kegelschnittes K' zugeordnet, und den Richtungen durch P entsprechen die Punkte von E'.

Entwickelt man für eine solche Richtung $\frac{x_2}{x_4} = \xi_2$ nach Potenzen von $\frac{x_1}{x_4} = \xi_1$, und $\frac{x_3}{x_4} = \xi_3$ ebenfalls nach Potenzen von ξ_1, setzt man also

$$\xi_2 = \lambda\xi_1 + \alpha_2\xi_1^2 + \ldots,$$
$$\xi_3 = \mu\xi_1 + \alpha_3\xi_1^2 + \ldots,$$

so ergibt sich

$$\frac{y_4}{y_1} = (\lambda + \mu + \lambda\mu)\xi_1 + \ldots,$$
$$\frac{y_2}{y_1} = \lambda + \alpha_2\xi_1 + \ldots,$$
$$\frac{y_3}{y_1} = \mu + \alpha_3\xi_1 + \ldots,$$

und man sieht, dafs, wenn in R eine Kurve C durch P in der durch λ und μ bestimmten Richtung geht, die entsprechende C' in R' durch einen von λ und μ abhängigen Punkt von E' geht, ohne diese Ebene im Allgemeinen zu berühren.

Geht C durch P in der Richtung einer der Fundamentallinien, z. B. in der Richtung $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, so nehme man die Entwickelungen

$$\xi_1 = \alpha_1\xi_3^2 + \beta_1\xi_3^3 + \ldots,$$
$$\xi_2 = \alpha_2\xi_3^2 + \beta_2\xi_3^3 + \ldots,$$

woraus sich findet

$$\frac{y_4}{y_3} = (\alpha_1 + \alpha_2)\xi_3^2 + \ldots,$$
$$\frac{y_1}{y_3} = \alpha_1\xi_3 + \ldots,$$
$$\frac{y_2}{y_3} = \alpha_2\xi_3 + \ldots,$$
$$\frac{y_2}{y_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \ldots,$$

C' geht demnach durch den Punkt ($y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_4 = 0$) von K', indem sie die Ebene $y_4 = 0$ berührt; die Tangente

ist der Schnitt von $y_4 = 0$ mit $y_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} y_2 = 0$. Analoges findet sich für jede andere Fundamentalrichtung.

Den Mantellinien des Kegels über K mit der Spitze P entsprechen eindeutig die Punkte von K'. Nehmen wir z. B. die Gerade $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und schneiden wir auf ihr durch die Ebenen des Büschels $x_3 - \lambda x_4 = 0$ sämtliche Punkte aus, so können wir, wenn $\frac{x_3}{x_4} - \lambda = \xi_3 - \lambda = \xi'$ gesetzt wird, für eine Kurve C, welche durch einen durch λ bestimmten Punkt von $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ geht,

$$\xi_1 = \mu\xi_2 + \alpha\xi_2^2 + \beta\xi_2^3 + \ldots,$$
$$\xi' = \mu'\xi_2 + \alpha'\xi_2^2 + \beta'\xi_2^3 + \ldots$$

setzen. Daraus ergibt sich

$$\frac{y_1}{y_3} = \frac{\xi_1}{\xi_3} = \frac{\mu}{\lambda}\xi_2 + \frac{\alpha\lambda - \mu\mu'}{\lambda^2}\xi_2^2 + \frac{\beta\lambda^2 - (\mu\alpha' + \mu'\alpha)\lambda + \mu\mu'^2}{\lambda^3}\xi_2^3 + \ldots,$$

$$\frac{y_2}{y_3} = \frac{1}{\lambda}\xi_2 - \frac{\mu'}{\lambda^2}\xi_2^2 + \frac{\mu'^2 - \alpha'\lambda}{\lambda^3}\xi_2^3 + \ldots,$$

$$\frac{y_4}{y_3} = (1+\mu)\xi_2 + \frac{\alpha\lambda + \mu}{\lambda}\xi_2^2 + \frac{\lambda^2\beta + \alpha\lambda - \mu\mu'}{\lambda^2}\xi_2^3 + \ldots$$

Man sieht aus diesen Gleichungen, dafs, was auch λ sei, die entsprechende Kurve C' immer durch den Punkt ($y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_4 = 0$) von K' geht.

Nehmen wir auf $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ einen bestimmten Punkt heraus, so wird dieser ausgeschnitten durch eine bestimmte Ebene $x_3 - \lambda x_4 = 0$. Dieser entspricht in K' eine Fläche zweiter Ordnung

$$y_3(y_4 - \lambda(y_1 + y_2)) - \lambda y_1 y_2 = 0,$$

deren Tangentenebene in ($y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_4 = 0$) die Gleichung

$$y_4 - \lambda(y_1 + y_2) = 0$$

hat. Setzen wir in diese Gleichung die vorhin gefundenen Werte von $\frac{y_1}{y_3}$, $\frac{y_2}{y_3}$, $\frac{y_4}{y_3}$ ein, so finden wir

$$\frac{y_4}{y_3} - \lambda\left(\frac{y_1}{y_3} + \frac{y_2}{y_3}\right) = \frac{\mu + \mu' + \mu\mu'}{\lambda}\xi_2^2 + \frac{\lambda(\alpha + \alpha' + \mu\alpha' + \mu'\alpha) + \mu'^2(\mu - 1) - \mu\mu'}{\lambda^2}\xi_2^3 + \ldots,$$

d. h. wenn C durch den auf $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ durch λ bestimmten Punkt irgendwie hindurchgeht, hat C' mit der Fläche 2. Ordnung, welche der den Punkt ausschneidenden Ebene entspricht, immer zwei Punkte gemein, welche in der Tangentenebene an die Fläche liegen. Der auf den Punkt ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 - \lambda x_4 = 0$) folgende Punkt von C ist nun durch die Koeffizienten μ und μ' bestimmt; da für C $\frac{x_1}{x_2} = \mu$ ist, mufs für C' $\frac{y_1}{y_2} = \mu$ sein; die Kurve C' hat also mit der vorhergenannten Tangentenebene zwei Punkte gemein, deren Verbindungslinie der Schnitt derselben mit der Ebene $y_1 - \mu y_2 = 0$ ist, was auch μ' sei. Allen Richtungselementen des Punktes auf der Mantellinie, welche in einer und derselben durch diese gehenden Ebene liegen, entspricht also ein ein einziges Richtungselement des der Mantellinie entsprechenden Punktes von K'. Den Punkten einer Mantellinie entsprechen also Flächenelemente.

Entwickelt man $\frac{y_1}{y_3} = \eta_1$ nach Potenzen von $\frac{y_2}{y_3} = \eta_2$, so erhält man

$$\eta_1 = \mu\eta_2 + \alpha\lambda\eta_2^2 + (\alpha\mu' + \beta\lambda^2)\,\eta_2^3 + \ldots;$$

$\frac{y_4}{y_3} = \eta_4$ gibt, nach Potenzen von η_2 entwickelt

$$\eta_4 = \lambda[(1+\mu)\eta_2 + (\alpha\lambda + \mu\mu' + \mu + \mu')\eta_2^2 + ((1+\mu)(\mu'^2 + \alpha'\lambda) + 2\alpha\lambda\mu' + \mu\mu' + \lambda^2\beta + \alpha\lambda)\,\eta_2^3 + \ldots].$$

Man sieht aus diesen Entwickelungen, dafs der dritte Punkt von C' eindeutig durch μ' bestimmt ist, wenn α gegeben ist; ebenso, dafs der vierte Punkt eindeutig durch α' bestimmt ist unter der Voraussetzung, dafs β gegeben ist, u. s. w.

Geht die Kurve C durch den Punkt ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 - \lambda x_4 = 0$), indem sie die Mantellinie des Kegels K berührt, so können wir entwickeln

$$\xi_1 = \alpha_1\xi'^2 + \beta_1\xi'^3 + \ldots,$$
$$\xi_2 = \alpha_2\xi'^2 + \beta_2\xi'^3 + \ldots,$$

wobei wie früher

$$\xi_1 = \frac{x_1}{x_4},\ \xi_2 = \frac{x_2}{x_4},\ \xi_3 = \frac{x_3}{x_4},\ \xi' = \xi_3 - \lambda$$

ist. Man erhält mittelst dieser Entwickelungen

$$\frac{y_1}{y_3} = \frac{\alpha_1}{\lambda}\xi'^2 + \frac{\beta_1\lambda - \alpha_1}{\lambda^2}\xi'^3 + \ldots,$$

$$\frac{y_2}{y_3} = \frac{\alpha_2}{\lambda}\xi'^2 + \frac{\beta_2\lambda - \alpha_2}{\lambda^2}\xi'^3 + \ldots,$$

$$\frac{y_4}{y_3} = (\alpha_1 + \alpha_2)\xi'^2 + (\beta_1 + \beta_2)\xi'^3 + \ldots,$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \ldots,$$

$$\frac{y_4}{y_3} - \lambda\frac{y_1 + y_2}{y_3} = \frac{(\beta_1 + \beta_2)(1 - \lambda) + \alpha_1 + \alpha_2}{\lambda}\xi'^3 + \ldots,$$

woraus man sieht, dafs die entsprechende Kurve C' im Punkte $(y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_4 = 0)$ einen Rückkehrpunkt hat, dessen Tangente die Schnittlinie der Ebene $\alpha_2 y_1 - \alpha_1 y_2 = 0$ mit der früher genannten Tangentenebene

$$y_4 - \lambda(y_1 + y_2) = 0$$

ist.

B.

Spezielle Fälle.

I. Der Kegelschnitt K möge in 2 gerade Linien zerfallen.

Ist der feste Punkt P der Punkt $(x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0)$, und sind die Geraden, in welche der Kegelschnitt zerfällt, die Schnittlinien der Ebenen $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ mit der Ebene $x_4 = 0$, so hat man zur Transformation die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varrho y_1 &= x_1 x_4,\\
\varrho y_2 &= x_2 x_4,\\
\varrho y_3 &= x_3 x_4,\\
\varrho y_4 &= x_1 x_2;\\
\sigma x_1 &= y_1 y_4,\\
\sigma x_2 &= y_2 y_4,\\
\sigma x_3 &= y_3 y_4,\\
\sigma x_4 &= y_1 y_2.
\end{aligned}$$

In R' tritt dieselbe Spezialisierung ein, wie in R, indem der Kegelschnitt K' ebenfalls in zwei Gerade zerfällt, welche

die Schnittlinien der Ebenen $y_1 = 0$ und $y_2 = 0$ mit der Ebene $y_4 = 0$ sind.

Für den Punkt P bleibt im Allgemeinen das früher Gesagte erhalten, indem den verschiedenen Richtungen durch denselben die verschiedenen Punkte der Ebene E' des zerfallenden Kegelschnittes K' entsprechen. Etwas Neues ergibt sich für die Richtung von P, welche in die Verbindungslinie von P mit dem Doppelpunkt D des zerfallenden Kegelschnittes K fällt. Geht eine Kurve in dieser Richtung durch P, so kann man setzen

$$\xi_1 = \alpha_1 \xi_3^2 + \beta_1 \xi_3^3 + \ldots,$$
$$\xi_2 = \alpha_2 \xi_3^2 + \beta_2 \xi_3^3 + \ldots,$$

wobei ξ_1, ξ_2, ξ_3 bezw. die Verhältnisse $\frac{y_1}{y_4}, \frac{y_2}{y_4}, \frac{y_3}{y_4}$ bedeuten. Aus diesen Reihen folgen dann die weiteren

$$\frac{y_1}{y_3} = \alpha_1 \xi_3 + \beta_1 \xi_3^2 + \ldots,$$
$$\frac{y_2}{y_4} = \alpha_2 \xi_3 + \beta_2 \xi_3^2 + \ldots,$$
$$\frac{y_4}{y_3} = \alpha_1 \alpha_2 \xi_3^3 + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \xi_3^4 + \ldots,$$
$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \ldots,$$

welche zeigen, dafs die entsprechende Kurve im Punkt ($y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_4 = 0$) die Ebene E' zur Schmiegungsebene hat; die Tangente an die Kurve ist der Schnitt von $y_4 = 0$ mit der Ebene $\alpha_2 y_1 - \alpha_1 y_2 = 0$.

Für die Geraden von P nach den Punkten des zerfallenden Kegelschnittes K bleibt auch das im allgemeinen Fall Gesagte giltig; nur die Linie PD macht eine Ausnahme; bestimmen wir auf ihr einen Punkt durch die Ebene $x_3 - \lambda x_4 = 0$, setzen $\xi_3 - \lambda = \xi'$ und entwickeln ξ_1 und ξ_2 nach Potenzen von ξ', so findet sich

$$\xi_1 = \alpha_1 \xi' + \beta_1 \xi'^2 + \gamma_1 \xi'^3 + \ldots,$$
$$\xi_2 = \alpha_2 \xi' + \beta_2 \xi'^2 + \gamma_2 \xi'^3 + \ldots,$$
$$\frac{y_1}{y_3} = \frac{\alpha_1}{\lambda} \xi' + \frac{\beta_1 \lambda - \alpha_1}{\lambda^2} \xi'^2 + \frac{\gamma_1 \lambda^2 - \beta_1 \lambda + \alpha_1}{\lambda^3} \xi'^3 + \ldots,$$

$$\frac{y_2}{y_3} = \frac{\alpha_2}{\lambda}\xi' + \frac{\beta_2\lambda - \alpha_2}{\lambda^2}\xi'^2 + \frac{\gamma_2\lambda^2 - \beta_2\lambda + \alpha_2}{\lambda^3}\xi'^3 + \ldots,$$

$$\frac{y_4}{y_3} = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\lambda}\xi'^2 + \frac{\lambda(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) - \alpha_1\alpha_2}{\lambda_2}\xi'^3 + \ldots$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \ldots$$

Entwickelt man aus diesen Formeln $\eta_1 = \frac{y_1}{y_3}$ und $\eta_4 = \frac{y_4}{y_3}$ nach Potenzen von $\eta_2 = \frac{y_2}{y_3}$, so ergibt sich

$$\eta_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\eta_2 + \frac{\alpha_2(\beta_1\lambda - \alpha_1) - \alpha_1(\beta_2\lambda - \alpha_2)}{\alpha_2^3}\eta_2^2 + \ldots,$$

$$\eta_4 = \frac{\lambda\alpha_1}{\alpha_2}\eta_2^2 + \ldots,$$

woraus ersichtlich ist, dafs, wenn eine Kurve durch den erwähnten Punkt auf PD geht, die transformierte immer die Ebene E' im Punkte ($y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_4 = 0$) berührt, und zwar bleibt die Tangente immer dieselbe, so lange für die erstere Kurve das Verhältnis $\frac{x_1}{x_2}$ dasselbe (hier $= \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$) bleibt, d. h. so lange die Kurve an der Stelle in einer und derselben durch PD gehenden Ebene liegt. Der Wert von λ ist dabei ganz beliebig; es gilt das soeben Gesagte also für jeden Punkt von PD; erst der dritte Punkt der transformierten Kurve ist bestimmt durch λ und die Koeffizienten β_1 und β_2, welche die Fortschreitungsrichtung der ursprünglichen Kurve in der Ebene $\alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2 = 0$ bestimmen.

Den Richtungen durch den Doppelpunkt D in R entsprechen die Richtungen durch den Doppelpunkt D' in R'. Denn für den ersteren hat man bei einer beliebigen Richtung:

$$\xi_1' = \alpha_1\xi_2' + \beta_1\xi_2'^2 + \ldots,$$
$$\xi_4' = \alpha_2\xi_2' + \beta_2\xi_2'^2 + \ldots,$$

wobei ξ_1', ξ_2', ξ_3' die Verhältnisse $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$, $\frac{x_4}{x_3}$ bedeuten.

Daraus folgt

$$\frac{y_1}{y_3} = \alpha_1\xi_2' + \beta_1\xi_2'^2 + \ldots$$

$$\frac{y_2}{y_3} = \xi_2',$$
$$\frac{y_4}{y_3} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\xi_2' + \frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2}\xi_2'^2 + \ldots,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Für die Richtung $\overline{DP}$ von P setze man

$$\xi_1' = \alpha_1\xi_4'^2 + \beta_1\xi_4'^3 + \ldots,$$
$$\xi' = \alpha_2\xi_4'^2 + \beta_2\xi_4'^3 + \ldots,$$

wodurch sich berechnet

$$\frac{y_1}{y_3} = \alpha_1\xi_4'^2 + \ldots,$$
$$\frac{y_2}{y_3} = \alpha_2\xi_4'^2 + \ldots,$$
$$\frac{y_4}{y_3} = \alpha_1\alpha_2\xi_4'^4 + \ldots,$$
$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \ldots;$$

in R' erhält man demnach einen Rückkehrpunkt mit der Schnittlinie von $y_4 = 0$ und $\alpha_2 y_1 - \alpha_1 y_2 = 0$ als Tangente.

Der Richtung von D in einer der Geraden, in welche K zerfällt, entspricht die analoge Richtung in der anderen Ebene.

II. **Der Punkt P rücke in die Nähe des Kegelschnittes K, aber nicht in seine Ebene; K zerfalle nicht.**

Sämtliche Transformationsflächen zweiter Ordnung erhalten dadurch eine gemeinsame Tangentenebene T in P. Ist diese $x_1 = 0$, ist ferner $x_4 = 0$ die Ebene E von K, $x_3 = 0$ eine beliebige andere Tangentenebene von K und $x_2 = 0$ eine Ebene, welche durch P und den Berührungspunkt von K und $x_3 = 0$ geht, so lauten die Transformationsformeln:

$$\varrho y_1 = x_1 x_4, \qquad \sigma x_1 = y_1^2,$$
$$\varrho y_2 = x_2 x_4, \qquad \sigma x_2 = y_1 y_2,$$
$$\varrho y_3 = x_4^2, \qquad \sigma x_3 = y_3 y_4 - y_2^2,$$
$$\varrho y_4 = x_1 x_3 + x_2^2; \qquad \sigma x_4 = y_1 y_3.$$

Im Raume R' liegt der Fundamentalkegelschnitt K' in $y_1 = 0$, während $y_3 = 0$ die gemeinsame Tangentenebene T'

aller Transformationsflächen zweiter Ordnung, $y_4 = 0$ eine beliebige Tangentenebene an K' und $y_2 = 0$ eine beliebige Ebene durch P' und den Berührungspunkt von K' mit $y_4 = 0$ ist. P' hat die Gleichungen $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$.

Eine Verschiedenheit von dem allgemeinen Fall zeigt sich darin, dafs den beliebigen Richtungen durch P nicht die Punkte einer Ebene, sondern die Richtungen durch P' entsprechen. Denn setzt man in R

$$\xi_1' = \alpha_1 \xi_2' + \beta_1 \xi_2'^2 + \ldots,$$
$$\xi_4' = \alpha_2 \xi_2' + \beta_2 \xi_2'^2 + \ldots,$$

so findet man die Verhältnisse

$$\frac{y_1}{y_4} = \alpha_2 \xi_2' + \ldots,$$
$$\frac{y_2}{y_4} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \xi_2' + \ldots,$$
$$\frac{y_3}{y_4} = \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} \xi_2' + \ldots,$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung erhellt.

Bestimmen wir in $x_4 = 0$ einen Punkt durch die Gleichungen $x_1 - \lambda x_2 = 0$ und $x_3 - \mu x_2 = 0$, und setzen wir $\frac{x_1}{x_2} = \xi_1$, $\frac{x_3}{x_2} = \xi_3$, $\frac{x_4}{x_3} = \xi_4$, $\xi_1 - \lambda = \xi'$, $\xi_3 - \mu = \xi''$, so erhält man durch Entwickelung von ξ' und ξ_4 nach Potenzen von ξ'' die Reihen

$$\xi' = \alpha_1 \xi'' + \beta_1 \xi''^2 + \ldots,$$
$$\xi_4 = \alpha_2 \xi'' + \beta_2 \xi''^2 + \ldots,$$

durch welche eine beliebige Richtung durch den erwähnten Punkt gegeben ist. Mit Hilfe der Reihen ergibt sich

$$\frac{y_1}{y_4} = \frac{\alpha_2 \lambda}{1 + \mu\lambda} \xi'' + \ldots,$$
$$\frac{y_2}{y_4} = \frac{\alpha_2}{1 + \mu\lambda} \xi'' + \ldots,$$
$$\frac{y_1}{y_2} = \lambda + \ldots,$$
$$\frac{y_3}{y_4} = \frac{\alpha_2^2}{1 + \mu\lambda} \xi''^2 + \ldots$$

Als Entsprechendes erhält man also in R' eine Berührung von $y_3 = 0$; die Tangente ist der Schnitt von $y_3 = 0$ mit

$y_1 - \lambda y_2 = 0$; dabei ist der Wert von μ noch ganz beliebig; dieser wirkt erst bestimmend ein auf die Lage des dritten Punktes. Sämtlichen Punkten einer durch P gehenden Geraden in E entspricht also immer eine Richtung von P' in T''; die Lage des ersteren Punktes auf der betreffenden Geraden beeinflufst in R' erst den dritten Punkt.

Den einfach unendlich vielen Geraden der Ebene T, welche durch P gehen, entsprechen die einfach unendlich vielen Punkte von K'. Ist eine Gerade in $x_1 = 0$ festgelegt durch die Ebene $x_2 - \lambda x_4 = 0$, so ist für das Entsprechende in R' $\frac{y_1}{y_3} = \frac{x_1}{x_4} = 0$, also $y_1 = 0$; ferner $\frac{y_2}{y_4} = \frac{1}{\lambda}$, $\frac{y_2}{y_3} = \lambda$; durch Elimination von λ aus den beiden letzten Gleichungen folgt $y_3 y_4 - y_2^2 = 0$, woraus man sieht, dafs man für wechselndes λ die Punkte von K' bekommt.

III. **Punkt P rücke an die eine der Geraden heran, in welche der Kegelschnitt K zerfällt.**

P darf nicht in die Nähe des Doppelpunktes D von K rücken, da ja sonst die Flächen zweiter Ordnung in diesem Punkt 2 Tangentenebenen haben würden. Ist $x_4 = 0$ die Ebene von K, $x_2 = 0$ die gemeinsame Tangentenebene T aller Transformationsflächen zweiter Ordnung, und werden die beiden Geraden G_1 und G_2, in welche K zerfällt, bezw. durch die Ebenen $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ ausgeschnitten, ist ferner $x_3 = 0$ eine beliebige Ebene durch den in der Nähe von G_1 liegenden Punkt P, so hat man als Transformationsformeln:

$$\begin{aligned} \varrho y_1 &= x_1 x_4, & \sigma x_1 &= y_1^2, \\ \varrho y_2 &= x_1 x_2, & \sigma x_2 &= y_2 y_4, \\ \varrho y_3 &= x_3 x_4, & \sigma x_3 &= y_1 y_3, \\ \varrho y_4 &= x_4^2; & \sigma x_4 &= y_1 y_4. \end{aligned}$$

In R' tritt dieselbe Spezialisierung ein; K' zerfällt in 2 Gerade, G_1' und G_2', welche in der Ebene $y_1 = 0$ liegen; die erstere ist der Schnitt dieser Ebene mit $y_4 = 0$, die

letztere der mit $y_2 = 0$; $y_3 = 0$ geht beliebig durch P'; $y_4 = 0$ ist die gemeinsame Tangentenebene T' aller Flächen zweiter Ordnung in P'.

Bei diesem Falle ist im Gegensatze zum vorigen hervorzuheben, dafs den durch P gehenden Geraden von T nicht mehr die Punkte des gesamten zerfallenden Kegelschnittes K' entsprechen, sondern nur die eines Teiles desselben, nämlich von G_2'. Denn eine solche Gerade in T' hat die Gleichungen $x_1 = 0$, $x_3 - \lambda x_4 = 0$; daraus folgt $\frac{y_1}{y_4} = 0$; $\frac{y_2}{y_4} = 0$ und $\frac{y_3}{y_4} = \lambda$, durch welche Gleichungen die Punkte von G_2' ausgedrückt sind. Das weitere Verhalten dieser Punkte ist analog dem im allgemeinen Falle festgestellten. Den Punkten der Geraden G_1 entsprechen die Punkte von G_1'; ist ein Punkt auf der ersteren bestimmt durch $x_3 - \lambda x_2 = 0$, und bezeichnen wir $\xi_3 - \lambda$ mit ξ', wobei $\xi_3 = \frac{x_3}{x_2}$ ist, so hat man für eine beliebige Kurve, welche durch den Punkt geht, die Reihenentwickelungen

$$\xi_1 = \alpha_1 \xi' + \beta_1 \xi'^2 + \ldots,$$
$$\xi_4 = \alpha_2 \xi' + \beta_2 \xi'^2 + \ldots,$$

wenn $\xi_1 = \frac{x_1}{x_2}$, $\xi_4 = \frac{x_4}{x_2}$ ist. Es folgt daraus, dafs

$$\frac{y_1}{y_4} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \ldots,$$
$$\frac{y_1}{y_2} \alpha_2 \xi' + \ldots,$$
$$\frac{y_2}{y_3} = \frac{\alpha_1}{\lambda \alpha_2} + \ldots$$

ist, welche Ausdrücke zeigen, dafs die transformierte Kurve durch einen von λ linear abhängigen Punkt von G_1 ($y = 0$, $y_4 = 0$) geht, nachdem α_1 und α_2 bestimmt angenommen sind.

IV. **Die beiden Geraden des zerfallenden Kegelschnittes mögen einander benachbart werden; P liege nicht in der Ebene der beiden Geraden und endlich entfernt von ihnen.**

Ist P der Punkt $(x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0)$, liegen die beiden benachbarten Geraden in $x_4 = 0$ (E), und geht $x_1 = 0$ durch eine der beiden Geraden, so lauten die Transformationsgleichungen:

$$\begin{aligned} \varrho y_1 &= x_1 x_4, & \sigma x_1 &= y_1 y_4, \\ \varrho y_2 &= x_2 x_4, & \sigma x_2 &= y_2 y_4, \\ \varrho y_3 &= x_3 x_4, & \sigma x_3 &= y_3 y_4, \\ \varrho y_4 &= x_1^2; & \sigma x_4 &= y_1^2. \end{aligned}$$

In R' ist die Lage der Fundamentalgebilde ganz analog, wie die in R. Die Transformationsflächen zweiter Ordnung sind in diesem Falle sämtlich Kegel mit der Spitze in einer der benachbarten Geraden.

Der Fall bietet wenig Neues dar, indem Punkt P wie der analoge Punkt im allgemeinen Fall und die Geraden von P nach den Punkten der ausgezeichneten Geraden sich verhalten, wie die Gerade PD im I. Spezialfall. Neu ist, dafs den Richtungen durch einen Punkt der ausgezeichneten Geraden in R ebenfalls die Richtungen durch einen Punkt der ausgezeichneten Geraden in R' entsprechen. Nehmen wir z. B. den Punkt $(x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_4 = 0)$, so können wir für eine durch ihn gehende Kurve setzen:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \alpha_1 \xi_2 + \beta_1 \xi_2^2 + \ldots, \\ \xi_4 &= \alpha_2 \xi_2 + \beta_2 \xi_2^2 + \ldots, \end{aligned}$$

wo $\xi_1 = \dfrac{x_1}{x_3}$ und $\xi_4 = \dfrac{x_4}{x_3}$ ist.

Es ergibt sich dann, wie behauptet wurde:

$$\begin{aligned} \frac{y_1}{y_3} &= \alpha_1 \xi_2 + \ldots, \\ \frac{y_2}{y_3} &= \alpha_2 \xi_2 + \ldots, \\ \frac{y_4}{y_3} &= \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2} \xi_2 + \ldots \end{aligned}$$

V. **Punkt P rücke noch an die beiden benachbarten sich schneidenden Geraden heran, aber so, dafs eine durch P und eine der Geraden gehende Ebene mit der der beiden Geraden keinen endlichen Winkel bildet, d. h. dafs die Transformationskegel zweiter Ordnung sich in P oskulieren.**

Ist $x_4 = 0$ wieder die Ebene der beiden benachbarten Geraden, $x_1 = 0$ eine beliebige Ebene durch eine derselben, $x_2 = 0$ eine beliebige Ebene durch P, und $x_3 = 0$ eine ganz beliebige Ebene, so nehme man zur Transformation die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varrho y_1 &= x_1 x_4, & \sigma x_1 &= y_1 y_3, \\ \varrho y_2 &= x_2 x_4, & \sigma x_2 &= y_2 y_3, \\ \varrho y_3 &= x_4^2, & \sigma x_3 &= y_3 y_4 + y_1^2, \\ \varrho y_4 &= x_3 x_4 - x_1^2; & \sigma x_4 &= y_3^2. \end{aligned}$$

In R' tritt dieselbe Spezialisierung ein, wie in R; die beiden benachbarten Geraden liegen in $y_3 = 0$; P' ist der Punkt $(y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0)$.

Den beliebigen Richtungen durch P entsprechen die beliebigen Richtungen durch P'.

Berührt eine Kurve beim Durchgang durch P die Ebene der benachbarten Geraden, so thut die entsprechende Kurve in R' das Analoge.

Geht eine Kurve durch P, indem sie mit dem Kegel $x_3 x_4 - x_1^2 = 0$ 3 Punkte gemein hat, so geht die entsprechende, davon herrührend, durch einen bestimmten Punkt der durch die beiden benachbarten Geraden in R' gehenden Fundamentalebene. Für eine solche Kurve kann man nämlich setzen

$$\begin{aligned} \xi_4 &= \xi_1^2 + \ldots, \\ \xi_2 &= \alpha_2 \xi_1 + \ldots, \end{aligned}$$

wobei ξ_1, ξ_2, ξ_4 bezw. die Verhältnisse $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, \frac{x_4}{x_3}$ sind. Aus diesen Reihen findet sich

$$\frac{y_1}{y_4} = \frac{1}{\beta_1} + \ldots,$$

$$\frac{y_2}{y_4} = \frac{\alpha_2}{\beta_1} + \ldots,$$
$$\frac{y_3}{y_4} = \frac{1}{\beta_1} + \ldots,$$

wie man sieht, erhält man einen Punkt von $y_3 = 0$.

Es ist leicht zu sehen, dafs sämtliche Transformationskegel zweiter Ordnung sich in P oskulieren. Die Gleichung irgend eines der Kegel lautet

$$x_2 x_4 - x_1^2 + a x_4^2 + b\xi_2\xi_4 + c\xi_1\xi_4 = 0$$

oder

$$\xi_4 - \xi_1^2 + a\xi_4^2 + b\xi_2\xi_4 + c\xi_1\xi_4 = 0,$$

wenn ξ_1, ξ_2. ξ_4 die vorhin angegebenen Verhältnisse sind. Es folgt daraus

$$\xi_4 = \xi_1^2 + \ldots,$$

wobei die auf ξ_1^2 folgenden Glieder von der dritten, vierten etc. Dimension in ξ_1, ξ_2 sind. Da das einzige Glied zweiter Dimension die Koeffizienten *a, b, c* nicht enthält, so sieht man, dafs bei sämtlichen Kegeln die Glieder zweiter Ordnung übereinstimmen, d. h. sie oskulieren sich.